المملكة المغربية
والبحث العلمي و تكوين الأطر
ـ قطاع التربية الوطنية ـ
الأكاديمية الجهوية للتربية و التكوين
نيـــــابـة عمالــة مقاطــعة عين الشق
المفتشية الإقليمية

أولمبياد الرياضيات
2009/2008

التاسعة أساسي	**الفرض الأول** **27 مارس 2009**	مدة الإنجاز: **ساعتان**

التمرين الأول: (4ن)

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا بحيث : $x-\frac{1}{x}=1$

بين أن : $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$ ثم استنتج أن: $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

التمرين الثاني: (4ن)

أنجز عمال مقاولة عملا خلال 18 يوما لو شغلت هذه المقاولة 4 عمال إضافيين لتم إنجاز نفس العمل خلال 15 يوما فقط.
ما هو عدد عمال هذه المقاولة ؟

التمرين الثالث: (4ن)

1) ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا . بين أن: $x+\frac{1}{x}\geq 2$

2) لتكن a , b , c و d أربعة أعداد حقيقية موجبة قطعا

بين أن : $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 16$

التمرين الرابع: (4ن)

ليكن $ABCD$ مربعا و S نقطة خارجه حيث يكون المثلث SAB متساوي الساقين و قائم الزاوية في S
نضع $AB=a$. حدد المسافة SD بدلالة a

التمرين الخامس: (4ن)

ليكن ABC مثلثا . H و K هما على التوالي المسقطين العموديين للنقطتين A و B على التوالي بحيث
$AH=BK$
بين أن المثلث ABC متساوي الساقين في C

وفقك الله

من إرسال : التلميذ محمد طه الكيال

وزارة التربية الوطنية نيابة مقاطعة عين الشق	حل مقترح لمباراة الأولمبياد في الرياضيات للسنة الثالثة من التعليم الإعدادي الثانوي *-الفرض الأول-*	2009/03/27 أرسل من طرف التلميذ محمد طه الكيال التصحيح من اقتراح لخريسي سمير www.naja7math.com

تمرين 1 :

لدينا : $x-\frac{1}{x}=1$ منه : $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=1^2$ منه : $x^2-2+\frac{1}{x^2}=1$ منه : $x^2+\frac{1}{x^2}=1+2=3$

منه : $x^2+\frac{1}{x^2}+2=3+2$ أي : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=5$ و بما أن : $x>0$ فإن : $x+\frac{1}{x}>0$ منه : $\boxed{x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}}$

لدينا: $x-\frac{1}{x}=1$ و $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$ ، بعد جمع المتساويتين طرفا بطرف نجد أن : $2x=1+\sqrt{5}$

بالتالي : $\boxed{x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

تمرين 2 :

ليكن x عدد عمال هذه المقاولة.

بما أن العمل أنجز خلال 18 يوما فهذا يعني أن كل عامل ينجز هذا العمل بمفرده خلال $18\,x$ يوما.

إذا تم إضافة 4 عمال لإنجاز نفس العمل، سيكون $x+4$ عمال ينجزون نفس العمل خلال 15 يوما، هذا يعني أن كل عامل سينجز هذا العمل بمفرده خلال $15(x+4)$ يوما.

إذن نحصل على المعادلة: $18x=15(x+4)$ منه $18x=15x+60$ منه $3x=60$ منه $\boxed{x=20}$

لنتحقق من صحة الحل

إذا كان 20 عاملا ينجزون العمل خلال 18 يوم، إذن كل عامل سينجز هذا العمل بمفرده خلال $18\times 20=360$ يوم

هذا يعني أن 24 عاملا سينجزون نفس العمل خلال $\frac{360}{24}=15$ يوما.

تمرين 3 :

-1 لدينا: $x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1-2x}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$ بالتالي : $x+\frac{1}{x}\geq 2$

-2 لدينا :

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{d}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}+\frac{d}{b}+\frac{d}{c}+1$$

$$=4+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{d}+\frac{d}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{d}+\frac{d}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)$$

و حسب السؤال السابق مجموع كل عدد موجب قطعا مع مقلوبه يكون أكبر من أو يساوي 2 فإن:

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 4+2+2+2+2+2+2\geq 16$$

تمرين 4 :

لتكن H و K هما على التوالي مسقطا S على (AD) و (AB)

بما أن المثلث SAB متساوي الساقين فإن ارتفاعه (SK) سينطبق

مع واسطه، إذن K منتصف $[AB]$ منه : $AK=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$

بما أن SAB متساوي الساقين و قائم الزاوية في S فإن:

$S\hat{A}B=45°$ ، منه $A\hat{S}K=180-(45+90)=45°$

إذن المثلث ASK هو أيضا متساوي الساقين و قائم الزاوية في

K ، و هذا يعني أن $AHSK$ مربع

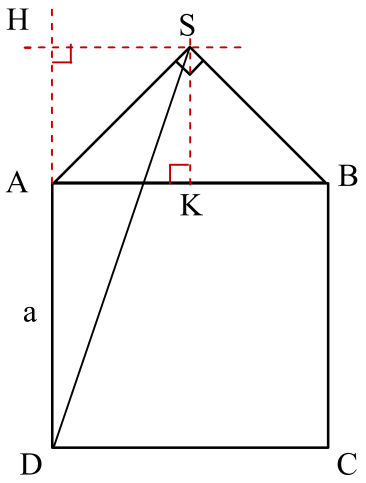
إذن : $HS=HK=\dfrac{a}{2}$

الآن، لدينا في المثلث القائم الزاوية DHS حسب مبرهنة

فيثاغورس المباشرة:

$$DS^2=HS^2+DH^2$$
$$=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(a+\frac{a}{2}\right)^2$$
$$=\frac{a^2}{4}+\left(\frac{3a}{2}\right)^2$$
$$=\frac{a^2}{4}+\frac{9a^2}{4}$$
$$DS^2=\frac{10a^2}{4}$$

بالتالي : $\boxed{DS=\dfrac{\sqrt{10}}{2}a}$



التمرين الأول(6نقط)

احسب :

$$A=\frac{10}{\sqrt{6}-1}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+3\left(\sqrt{5}-2\right)^{8}\times\left(\sqrt{5}+2\right)^{8}$$

$$B=\frac{\sqrt{4-\sqrt{9+2\sqrt{10}}}\times\sqrt{4+\sqrt{9+2\sqrt{10}}}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

التمرين الثاني(6 نقط)

a و b و c أعداد حقيقية و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

1) عمل الصيغتين :

$$K=(a-b)^2-(a-c)^2-(b-c)^2$$

$$H=a^{2n}-2a^n-b^{2n+2}+1$$

2) نفترض أن : $a\leq c\leq b$

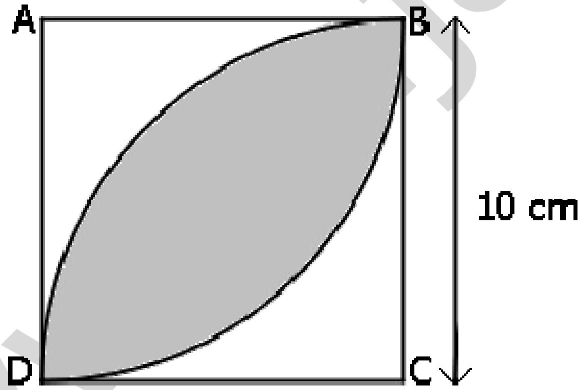
بسط :

$$R=\sqrt{(a-c)^2}-\sqrt{a^2-2ab+b^2}+\sqrt{(b-c)^2}$$

التمرين الثالث(4 نقط)

$ABCD$ مربع.

احسب S مساحة الجزء الملون:



التمرين الرابع(4 نقط)

ملحوظة: السؤالان1) و 2) مستقلان.

1) x و y عددان حقيقيان حيث : $x^4+x^2y^2+y^4=12$ و $x^2+xy+y^2=3$

احسب : x^2-xy+y^2

2) x و y عددان حقيقيان حيث : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\times\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

احسب : $x+y$

السنة الدراسية :2012 -2013

منارة الفردوس

إقصائيات أولمبياد الرياضيات — الفرض الأول — التصحيح

التمرين الأول(6نقط)

$$A=\frac{10}{\sqrt{6}-1}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+3\left(\sqrt{5}-2\right)^8\times\left(\sqrt{5}+2\right)^8=\frac{10\left(\sqrt{6}+1\right)}{5}-\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{1}+3\left(\sqrt{5}^2-2^2\right)^8$$

$$=2\left(\sqrt{6}+1\right)-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2+3\times1^8=2\sqrt{6}+2-5-2\sqrt{6}+3=0$$

$$\boxed{A=0}$$

$$B=\frac{\sqrt{4-\sqrt{9+2\sqrt{10}}}\times\sqrt{4+\sqrt{9+2\sqrt{10}}}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{4^2-\sqrt{9+2\sqrt{10}}^2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{16-\left(9+2\sqrt{10}\right)}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=-1\qquad\left(\sqrt{2}<\sqrt{5}\right)$$

$$\boxed{B=-1}$$

....

التمرين الثاني(6 نقط)

1)

$$K=(a-b)^2-(a-c)^2-(b-c)^2=[(a-b)+(a-c)]\times[(a-b)-(a-c)]-(b-c)^2$$

$$=(2a-b-c)\times(c-b)+(b-c)\times(c-b)=(c-b)\times[(2a-b-c)+(b-c)]$$

$$=(c-b)\times(2a-2c)=2(c-b)(a-c)$$

$$\boxed{K=2(c-b)(a-c)}$$

$$H=a^{2n}-2a^n+1-b^{2n+2}=\left(a^n-1\right)^2-\left(b^{n+1}\right)^2=\left(a^n-1+b^{n+1}\right)\times\left(a^n-1-b^{n+1}\right)$$

$$\boxed{H=\left(a^n-1+b^{n+1}\right)\times\left(a^n-1-b^{n+1}\right)}$$

2) $a\le c\le b$

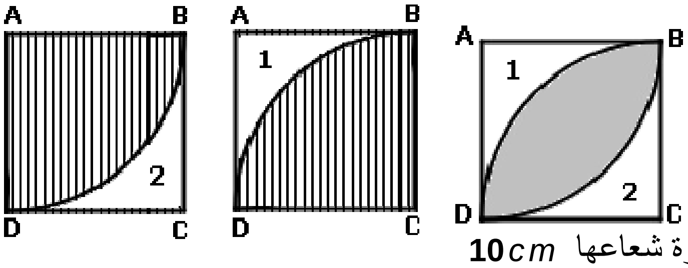
$$R=\sqrt{(a-c)^2}-\sqrt{a^2-2ab+b^2}+\sqrt{(b-c)^2}=\underbrace{\sqrt{(c-a)^2}}_{c\ge a}-\underbrace{\sqrt{(b-a)^2}}_{b\ge a}+\underbrace{\sqrt{(b-c)^2}}_{b\ge c}$$

$$=(c-a)-(b-a)+(b-c)=c-a-b+a+b-c=0$$

$$\boxed{R=0}$$

....

التمرين الثالث(4 نقط)



مساحة الجزء الملون هي مساحة المربع $ABCD$
ناقص مساحتي الجزئين الغير الملونين (1) و (2)
نسميهما S_1 و S_2 على التوالي

S_1 هي مساحة المربع $ABCD$ ناقص مساحة ربع دائرة شعاعها $10\,cm$

S_2 هي مساحة المربع $ABCD$ ناقص مساحة ربع دائرة شعاعها $10\,cm$

وبالتالي :
$$S \simeq 10^2 - \left(2\times\frac{10\times10\times\pi}{4}\right) \simeq 100 - 43 \simeq 57\,cm^2$$

$$\boxed{S \simeq 57\,cm^2}$$

التمرين الرابع(4 نقط)

1) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 12$ يعني أن $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = 12$

يعني أن $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = 12$

يعني أن $\left(x^2+y^2\right)^2 - (xy)^2 = 12$

يعني أن $\left(x^2+y^2+xy\right)\times\left(x^2+y^2-xy\right) = 12$

يعني أن $3\times\left(x^2+y^2-xy\right) = 12$ لأن $x^2+y^2+xy = 3$

يعني أن $x^2+y^2-xy = \frac{12}{3} = 4$

$$\boxed{x^2+y^2-xy = 4}$$

2) $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\times\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) = 1$ إذن : $y+\sqrt{y^2+1} \neq 0$ وأن $x+\sqrt{x^2+1} \neq 0$

$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\times\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) = 1$ يعني أن : $x+\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}} = \frac{y-\sqrt{y^2+1}}{-1}$

إذن: $\boxed{x+\sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+1} - y}$ (1)

بالمثل نبين أن: $\boxed{y+\sqrt{y^2+1} = \sqrt{x^2+1} - x}$ (2)

نجمع المتساويتين(1)و(2) طرفا بطرف فنجد أن:
$$(x+y) + \left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}\right) = \left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}\right) - (x+y)$$

ومنه فإن: $2(x+y) = 0$

وبالتالي : $\boxed{x+y=0}$

الأستاذ عزيز البهجة

منارة الفردوس — السنة الدراسية : 2012- 2013

أولمبياد الرياضيات(محلى) — الفرض الثانى — مدة الإنجاز : ساعة و45د

من إعداد الأستاذ عزيز البهجة

التمرين الأول(5نقط)

n عدد صحيح طبيعي . احسب : $A = \dfrac{4\left(2^{3n+1} + 2^{4n+2}\right)}{8^{n+1} + 16^{n+1}}$ و $B = \dfrac{(-1)^{n} + 3}{(-1)^{n+1} - 3}$

....

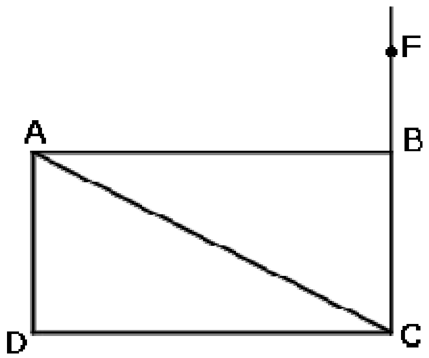
التمرين الثانى(5 نقط)

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا ومختلفان حيث : $a + 2b = 3\sqrt{ab}$

- احسب : $\dfrac{a}{b}$

....

التمرين الثالث(5 نقط)



1) أعد رسم الشكل في ورقة التحرير حيث ABCD مستطيل.

2) المستقيم المار من E والعمودي على (AC) يقطع [AB] في M

- برهن أن : $(CM) \perp (AE)$

....

التمرين الرابع(5 نقط)

a و **b** عددان حقيقيان موجبان قطعا حيث : $a + b = ab$

1) برهن أن : $ab \geq 4$

2) برهن أن : $\dfrac{a}{b^2 + ab} + \dfrac{b}{a^2 + ab} \geq \dfrac{1}{2}$

....

منارة الفردوس — السنة الدراسية : 2012- 2013

أولمبياد الرياضيات(محلى) الفرض الثاني التصحيح للأستاذ عزيزالبهجة

التمرين الأول

$$A = \frac{4\left(2^{3n+1} + 2^{4n+2}\right)}{8^{n+1} + 16^{n+1}} = \frac{2^2\left(2^{3n+1} + 2^{4n+2}\right)}{\left(2^3\right)^{n+1} + \left(2^4\right)^{n+1}} = \frac{2^{3n+3} + 2^{4n+4}}{2^{3n+3} + 2^{4n+4}} = 1$$

$$B = \frac{(-1)^n + 3}{(-1)^{n+1} - 3} = B = \frac{(-1)^n + 3}{(-1) \times (-1)^n - 3} = \frac{(-1)^n + 3}{-\left((-1)^n + 3\right)} = -1$$

....

التمرين الثاني

$a + 2b = 3\sqrt{ab}$ يعني أن $(a + 2b)^2 = \left(3\sqrt{ab}\right)^2$

يعني أن $a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$

يعني أن $a^2 - ab - 4ab + 4b^2 = 0$

يعني أن $a(a - b) - 4b(a - b) = 0$

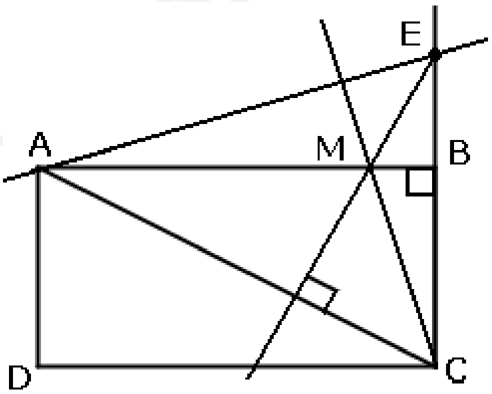
يعني أن $(a - b)(a - 4b) = 0$

ولدينا حسب المعطيات $a \neq b$ إذن $a - 4b = 0$ أي أن $a = 4b$ وبالتالي $\frac{a}{b} = 4$

ملاحظة: هناك طرق أخرى لحساب $\frac{a}{b}$

....

التمرين الثالث



1)(أنظر الشكل)

2) لدينا (AB) ارتفاع للمثلث AEC لأن $ABCD$ مستطيل و (EM) ارتفاع ثان للمثلث AEC لأن (EM) عمودي على (AC) (حسب المعطيات)

(AB) و (EM) يتقاطعان في النقطة M، إذن M مركز تعامدالمثلث AEC ومنه فإن (CM) ارتفاع
ثالث للمثلث AEC وبالتالي $(AE) \perp (CM)$

....

التمرين الرابع

1) بما أن a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا فإن : $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ لأن $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$

إذن $ab \geq 2\sqrt{ab}$ (لأن $a+b=ab$) ومنه فإن : $(ab)^2 \geq \left(2\sqrt{ab}\right)^2$

أي أن : $\frac{(ab)^2}{ab} \geq 4$ وبالتالي : $ab \geq 4$

2) لنبرهن أن : $\frac{a}{b^2+ab}+\frac{b}{a^2+ab} \geq \frac{1}{2}$

نضع : $R=\frac{a}{b^2+ab}+\frac{b}{a^2+ab}$ و لنبسط R

لدينـــــا :

$$R=\frac{a}{b^2+ab}+\frac{b}{a^2+ab}=\frac{a}{b}\times\frac{1}{a+b}+\frac{b}{a}\times\frac{1}{a+b}=\frac{a}{b}\times\frac{1}{ab}+\frac{b}{a}\times\frac{1}{ab}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}$$

$$R=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{(ab)^2}=\frac{(a+b)^2-2ab}{(ab)^2}=\frac{(ab)^2-2ab}{(ab)^2}=\frac{(ab)^2}{(ab)^2}-\frac{2ab}{(ab)^2}=1-\frac{2}{ab}$$

وبالتالـــــــــــي: $R=1-\frac{2}{ab}$

لدينا : $R-\frac{1}{2}=\left(1-\frac{2}{ab}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{2}{ab}=\frac{ab-4}{ab}$

حسب المعطيات لدينا $ab>0$ وحسب السؤال 1 لدينا $ab-4 \geq 0$

إذن : $R-\frac{1}{2} \geq 0$ أي أن $R \geq \frac{1}{2}$ وبالتالي : $\frac{a}{b^2+ab}+\frac{b}{a^2+ab} \geq \frac{1}{2}$

....

أولمبياد الرياضيات(محلي) الفرض الثالث مدة الإنجاز : ساعتان

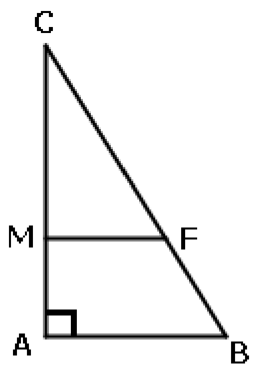
التمرين الأول(5نقط)

1)احسب : $A=\sqrt{9+\sqrt{17}}\times\sqrt{4+\sqrt{7+\sqrt{17}}}\times\sqrt{4-\sqrt{7+\sqrt{17}}}$

2) x قياس زاوية حادة حيث : $\sin x\times\cos x=\frac{1}{2}$

- احسب : $\sin x+\cos x$

التمرين الثاني(5 نقط)



في الشكل جانبه ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث: $AC=8$ و $AB=4$

M تنتمي للقطعة $[AC]$ و F تنتمي للقطعة $[CB]$ حيث : $(MF)//(AB)$

نضع $AM=x$ (x عدد حقيقي موجب قطعا)

احسب S مساحة شبه المنحرف MFBA بدلالة x

التمرين الثالث(5نقط)

1) x و y عددان حقيقيان

- بين أن : $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

2) a و b و c أعداد حقيقية حيث : $a+b+c=0$ و $a^3+b^3+c^3=12$

- احسب : abc

التمرين الرابع(5نقط)

ABC مثلث زواياه حادة.

E المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (AC)

F المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)

K المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC)

1)أنشئ الشكل

2) برهن أن : $[KA)$ منصف الزاوية $\widehat{FKE}$

من إعداد الأستاذ عزيز البهجة

التصحيح للأستاذ عزيز البهجة

التمرين الأول

1) احسب :

$$A = \sqrt{9+\sqrt{17}} \times \sqrt{4+\sqrt{7+\sqrt{17}}} \times \sqrt{4-\sqrt{7+\sqrt{17}}}$$

$$= \sqrt{9+\sqrt{17}} \times \sqrt{4^2 - \left(\sqrt{7+\sqrt{17}}\right)^2} = \sqrt{9+\sqrt{17}} \times \sqrt{9-\sqrt{17}}$$

$$= \sqrt{9^2 - \sqrt{17}^2} = \sqrt{81-17} = \sqrt{64} = 8$$

2) - لدينا : $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\cos x \times \sin x = 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2$

إذن : $\begin{cases} (\sin x + \cos x)^2 = 2 \\ \sin x + \cos x > 0 \end{cases}$ $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

التمرين الثاني

لدينا : $S = \frac{(MF + AB)}{2} \times AM = \frac{(MF + 4)}{2} \times x$

باستعمال مبرهنة طاليس المباشرة نجد أن : $MF = \frac{CM \times AB}{CA} = \frac{(8-x)\times 4}{8} = 4 - \frac{x}{2}$

إذن : $S = \frac{\left(4 - \frac{x}{2} + 4\right)}{2} \times x = \frac{\left(8x - \frac{x^2}{2}\right)}{2} = 4x - \frac{x^2}{4}$

التمرين الثالث

1) نبين بسهولة أن : $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

2) لدينا : $a + b = -c$

و $a^3 + b^3 + c^3 = 12$ يعني : $(a+b)\times(a^2 - ab + b^2) + c^3 = 12$

يعني: $(-c)\times(a^2 + b^2 - ab) + c^3 = 12$

يعني: $(-c)\times\left((a+b)^2 - 2ab - ab\right) + c^3 = 12$

يعني: $(-c)\times\left((-c)^2-3ab\right)+c^3=12$

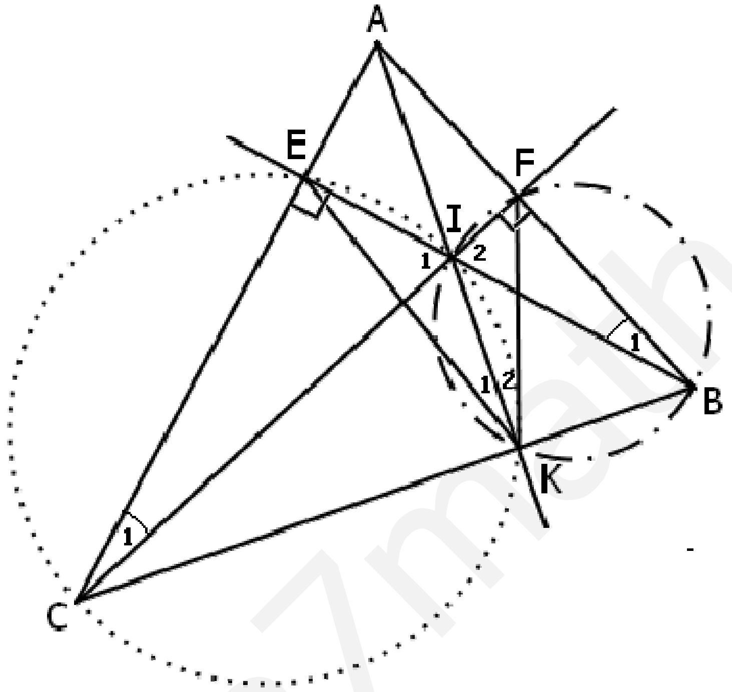
يعني: $-c^3+3abc+c^3=12$

يعني: $3abc=12$

يعني: $abc=4$

التمرين الرابع

(1



(2 لدينا : $\hat{I}_1=\hat{I}_2$ (زاويتان متقابلتان بالرأس) و $\widehat{CEI}=\widehat{BFI}=90°$

إذن المثلثان CEI و BFI متشابهان ومنه فإن : $\hat{C}_1=\hat{B}_1$

الرباعي KIFB دائري لأن : $\widehat{IKB}+\widehat{IFB}=90°+90°=180°$

الرباعي KIEC دائري لأن : $\widehat{IKC}+\widehat{IEC}=90°+90°=180°$

إذن : $\hat{K}_2=\hat{B}_1$ (زاويتان محيطيتان في نفس الدائرة وتحصران نفس القوس $\overset{\frown}{IF}$)

و : $\hat{K}_1=\hat{C}_1$ (زاويتان محيطيتان في نفس الدائرة وتحصران نفس القوس $\overset{\frown}{IE}$)

$$\begin{cases}\hat{C}_1=\hat{B}_1\\ \hat{K}_2=\hat{B}_1\\ \hat{K}_1=\hat{C}_1\end{cases}$$ إذن : $\hat{K}_1=\hat{K}_2$ ومنه فإن : $[KA)$ منصف الزاوية $\widehat{FKE}$

الأستاذ عزيز البهجة

منارة الفردوس

السنة الدراسية : 2012- 2013

أولمبياد الرياضيات(محلى) الفرض الرابع مدة الإنجاز : ساعتان

من إعداد الأستاذ عزيز البهجة

التمرين الأول(4 نقط)

a وb عددان حقيقيان حيث: $a^2+b^2-\sqrt{2}(a-b)+1=0$

- احسب : a وb

التمرين الثانى(4 نقط)

a وb عددان حقيقيان حيث: $a+b=1$ و $a^3+b^3=19$

- احسب : a و b

التمرين الثالث(4 نقط)

a وb عددان حقيقيان حيث: $a-b=1$

- برهن أن : $a^3-b^3 \geq \frac{1}{4}$

التمرين الرابع(4 نقط)

ABCمثلث قائم الزاوية في A و M نقطة من القطعة [BC].

Eالمسقط العمودي للنقطة M على [AB] و Fالمسقط العمودي للنقطة M على [AC]

- حدد موقع النقطة M على القطعة [BC] لتكون المسافة EF أصغر ما يمكن.

التمرين الخامس(4 نقط)

ABCمثلث قائم الزاوية في A و Hالمسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC)

- برهن أن : $AB+AC<AH+BC$

منارة الفردوس **السنة الدراسية : 2012- 2013**

أولمبياد الرياضيات(محلى) **الفرض الرابع**

عناصر الإجابة للأستاذ عزيز البهجة

التمرين الأول

$a^2+b^2-\sqrt{2}(a-b)+1=0$ يعني أن : $a^2-\sqrt{2}a+\frac{1}{2}+b^2+\sqrt{2}b+\frac{1}{2}=0$

يعني أن : $\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(b+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=0$

يعني أن : $b+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ و $a-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

يعني أن : $b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

التمرين الثاني

$a^3+b^3=19$ يعني أن : $(a+b)(a^2-ab+b^2)=19$

يعني أن : $(a+b)((a-b)^3-3ab)=19$

يعني أن : $1\times(1-3ab)=19$ (لأن : $a+b=1$)

يعني أن : $ab=-6$

يعني أن : $a=\frac{-6}{b}$

لدينا: $a+b=1$ إذن : $\frac{-6}{b}+b=1$ أي أن : $b^2-b-6=0$

$b^2-b-6=0$ يعني أن : $b^2-4+b-2=0$

يعني أن : $(b-2)(b+2)+b-2=0$

يعني أن : $(b-2)[(b+2)+1]=0$

يعني أن : $(b-2)(b+3)=0$

يعني أن : $b=-3$ أو $b=2$

لدينا : $a=\frac{-6}{b}$ إذن : إذاكان : $b=-3$ فإن : $a=2$ و إذاكان : $b=2$ فإن : $a=-3$

التمرين الثالث

لدينا : $a-b=1$ أي أن: $a=1+b$

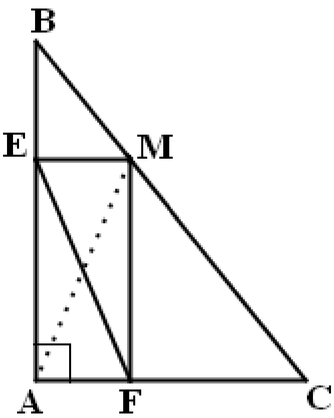
إذن :

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ &= 1\times\left((a-b)^2+3ab\right) \\ &= 1+3ab \\ &= 1+3(1+b)b \\ &= 3b^2+3b+1 \end{aligned}$$

لدينا : $(3b^2+3b+1)-\frac{1}{4}=3\left(b+\frac{1}{2}\right)^2$ إذن : $(3b^2+3b+1)\geq\frac{1}{4}$ لأن : $3\left(b+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$

وبالتالي : $a^3-b^3\geq\frac{1}{4}$

التمرين الرابع



نبين بسهولة أن EMFA مستطيل. إذن : EF = AM

وبالتالي المسافة EF أصغر ما يمكن إذا كانت المسافة AM أصغر ما يمكن .

المسافة AM أصغر ما يمكن إذا كانت M هي المسقط العمودي للنقطة A على $[BC]$.

خلاصة :

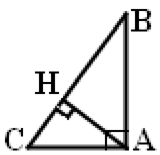
تكون المسافة EF أصغر ما يمكن إذا كانت النقطة M هي المسقط العمودي للنقطة A على $[BC]$.

التمرين الخامس

لدينا :

$$\begin{aligned} (AH+BC)^2-(AB+AC)^2 &= AH^2+BC^2-(AB^2+AC^2)+2(AH\times BC-AB\times AC) \\ &= AH^2+BC^2-BC^2+4\left(\frac{AH\times BC}{2}-\frac{AB\times AC}{2}\right) \\ &= AH^2+0+4(S-S) \\ &= AH^2 \end{aligned}$$

حيث S مساحة المثلث ABC.



بما أن : $AH^2>0$ فإن : $(AH+BC)^2>(AB+AC)^2$

إذن : $AH+BC>AB+AC$

الأستاذ عزيزالبهجة

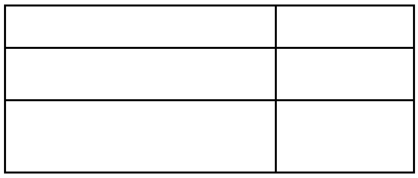
منارة الفردوس أولمبياد الرياضيات

إقصائيات محلية 2010 -2011 للسنة الثالثة إعدادي المدة : ساعة ونصف

(لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة)

التمرين الأول(3نقط)

كم مستطيلا في هذا الشكل؟



التمرين الثاني(3نقط)

n عدد صحيح طبيعي حيث : $n^2 = 200001^2 - 8\times 10^5$

احسبn

التمرين الثالث (4نقط)

a وb وc أعداد حقيقية حيث : $ac - ab = 1$

احسب : $R = (a - b + c)^2 - (a + b - c)^2$

التمرين الرابع(4نقط)

a وb وc وd أعداد حقيقية حيث : $a \leq b$ و $c \leq d$

برهن أن : $ad + bc \leq ac + bd$

التمرين الخامس(6نقط)

n عدد صحيح طبيعي. نضع : $p = n(n+1)(n+2)(n+3)$

1) بين أن : $p + 1 = n^4 + 2n^2\left(3n+1\right) + 9n^2 + 6n + 1$

2) استنتج تبسيطا للصيغة : $\sqrt{p+1}$

3) تطبيق :

أحسب العدد : $X = \sqrt{100\times 101\times 102\times 103 + 1}$

bahja.aziz
azizpromath@hotmail.com

منارة الفردوس أولمبياد الرياضيات

إقصائيات محلية 2010 -2011 للسنة الثالثة إعدادي عناصر الإجابة

التمرين الأول

يوجد 18 مستطيلا .

ملاحظة هامة :

إذا كان عدد الخطوط العمودية هو n وعدد الخطوط الأفقية هو p حيث : n و p عددان صحيحان طبيعيان أكبر من 2 فإن عدد المستطيلات هو : $\dfrac{np(n-1)(p-1)}{4}$

(يستطيع التلميذ في ما يلي من السنوات أن يبرهن على ذلك بنفسه.(درس التعداد))

التمرين الثاني

$$\begin{aligned}
n^2 &= 200001^2 - 8\times10^5 \\
&= (2\times10^5+1)^2 - 8\times10^5 \\
&= (2\times10^5)^2 + 2\times2\times10^5 + 1^2 - 8\times10^5 \\
&= (2\times10^5)^2 - 4\times10^5 + 1^2 \\
&= (2\times10^5)^2 - 2\times(2\times10^5)\times1 + 1^2 \\
&= (2\times10^5 - 1)^2
\end{aligned}$$

لدينا: $\begin{cases} n^2 = (2\times10^5-1)^2 \\ n \geq 0 \end{cases}$ إذن: $n = 2\times10^5 - 1 = 200000 - 1 = 199999$

التمرين الثالث

$$\begin{aligned}
R &= (a-b+c)^2 - (a+b-c)^2 \\
&= \left[(a-b+c)+(a+b-c)\right]\times\left[(a-b+c)-(a+b-c)\right] \\
&= 2a\times(2c-2b) \\
&= 4ac - 4ab \\
&= 4(ac-ab) \\
&= 4\times1 \\
&= 4
\end{aligned}$$

التمرين الرابع

لدينا:

$$(ad+bc)-(ac+bd) = ad - ac + bc - bd$$
$$= a(d-c)+b(c-d)$$
$$= a(d-c)-b(d-c)$$
$$= (a-b)(d-c)$$

وبما أن: $a \leq b$ و $c \leq d$ فإن: $(a-b)(d-c) \leq 0$

وبالتالي : $ad+bc \leq ac+bd$

التمرين الخامس

(1

$$p+1=(n^2+n)(n^2+5n+6)+1$$
$$= n^4+6n^3+11n^2+6n+1$$
$$= n^4+6n^3+2n^2+9n^2+6n+1$$
$$= n^4+2n^2(3n+1)+9n^2+6n+1$$

(2

$$p+1=n^4+2n^2(3n+1)+9n^2+6n+1$$
$$= (n^2)^2+2\times n^2\times(3n+1)+(3n+1)^2$$
$$= (n^2+(3n+1))^2$$
$$= (n^2+3n+1)^2$$

إذن : $\sqrt{p+1}=\sqrt{(n^2+3n+1)^2} = n^2+3n+1$

3) تطبيق :

$$X = \sqrt{100\times101\times102\times103+1}$$
$$= \sqrt{100\times(100+1)\times(100+2)\times(100+3)+1}$$
$$= \sqrt{n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1}$$

(حيث $n = 100$)

$$= n^2+3n+1$$
$$= 100^2+3\times100+1$$
$$= 10301$$

bahja.aziz
azizpromath@hotmail.com

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
الرباط سلا زمور زعير
نيابة إقليم الخميسات

أولمبياد الرياضيلت
الثالثة إعدادي

الفرض:الثاني
اليوم:الجمعة 2012/04/6
المدة : ساعتان ونصف
المستوى:الثالثة إعدادي
....
....

التمرين الأول

1) نضع : $n = \sqrt{\frac{7}{4} + \sqrt{3}} + 1 + \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{3}}$. بين أن n عدد صحيح طبيعي .

2) a و b و c أعداد حقيقية موجبة وتحقق : $3a^2 = 2\left(c^2 - b^2\right)$

- حدد أكبر هذه الأعداد معللا جوابك .

التمرين الثاني

1) x و y عددان حقيقيان بحيث : $x + y > 0$.

- بين أن : $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

2) a و b عددان حقيقيان موجبان . نضع : $m = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ و $n = \sqrt{a+1} - \sqrt{b+1}$

- قارن بين n و m معللا جوابك .

التمرين الثالث

$\widehat{xAy}$ زاوية حادة معلومة.

لتكن B نقطة من نصف المستقيم $[Ax)$ و C نقطة من نصف المستقيم $[Ay)$ حيث : $AC > AB$

حامل منصف الزاوية $\widehat{xAy}$ يقطع واسط $[BC]$ في ا لنقطة D .

نسقط النقطة D عموديا على (AB) في E و على (AC) في F .

1) قارن المثلثين DEB و CDF

2) بين أن : $BE = \frac{1}{2}(AC - BA)$ و أن : $AE = \frac{1}{2}(AB + AC)$.

التمرين الرابع

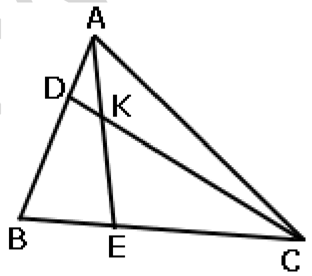
في الشكل جانبه لدينا : $AD = \frac{1}{3}AB$ و $BE = \frac{1}{3}BC$ و K نقطة تقاطع (DC) و (AE)

ليكن S و Δ و Δ' و Δ'' مساحات المثلثات ABC و KEC و ADK و AKC على التوالي ثم s مساحة الرباعي DKEB .

1) قارن بين s و Δ''

2) بين أن : $\Delta - \Delta' = \frac{1}{3}S$

3) أحسب S بدلالة Δ



التمرين الأول

1) $$n=\sqrt{\frac{7+4\sqrt{3}}{4}}+1+\sqrt{\frac{7-4\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}}{2}+\frac{2}{2}+\frac{\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}}{2}$$

لديـــــــــا أن : $2>\sqrt{3}$ إذن : $n=\frac{2+\sqrt{3}+2+2-\sqrt{3}}{2}=\frac{6}{2}=3$

$n=3$ إذن n عدد صحيح طبيعي.

2) لدينا $3a^2=2\left(c^2-b^2\right)$ وبما أن : $3a^2\geq 0$ فإن : $2\left(c^2-b^2\right)\geq 0$ أي أن $c^2\geq b^2$

$c^2\geq b^2$ و c و b عددان موجبان إذن $\boxed{c\geq b}$

لدينا $3a^2=2c^2-2b^2$ إذن $2a^2+a^2=2c^2-2b^2$ أي أن $2a^2-2c^2=-a^2-2b^2$

$-a^2-2b^2\leq 0$ إذن $2a^2-2c^2\leq 0$ ومنه فإن : $2a^2\leq 2c^2$ وبالتالي $a^2\leq c^2$

$a^2\leq c^2$ و c و a عددان موجبان إذن $\boxed{a\leq c}$

خلاصة : c هو أكبر هذه الأعداد

التمرين الثاني

1) لدينا $x+y>0$ ، لنبين أن : $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

$$d=\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{x^3}{x^2y^2}+\frac{y^3}{x^2y^2}-\frac{xy^2}{x^2y^2}-\frac{yx^2}{x^2y^2}=\frac{x^3+y^3-xy^2-yx^2}{x^2y^2}$$

$$d=\frac{x^3-yx^2+y^3-xy^2}{x^2y^2}=\frac{x^2(x-y)+y^2(y-x)}{x^2y^2}=\frac{x^2(x-y)-y^2(x-y)}{x^2y^2}=\frac{(x-y)\left(x^2-y^2\right)}{x^2y^2}$$

$$d=\frac{(x-y)\left(x^2-y^2\right)}{x^2y^2}=\frac{(x-y)(x-y)(x+y)}{x^2y^2}=\frac{(x-y)^2(x+y)}{x^2y^2}$$

لدينا $x+y>0$ و $\frac{(x-y)^2}{x^2y^2}\geq 0$ إذن : $\frac{(x-y)^2(x+y)}{x^2y^2}>0$ وبالتالي : $\boxed{\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

2) لنقارن m و n حيث : $m=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ و $n=\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}$

لدينا :

$$m=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

و

$$n=\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}\right)=\frac{\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}\right)\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}\right)}{\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}\right)}=\frac{a+1-b-1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}}=\frac{a-b}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}}$$

لدينا : $a+1\geq a$ إذن $\sqrt{a+1}\geq\sqrt{a}$ ① و $b+1\geq b$ إذن $\sqrt{b+1}\geq\sqrt{b}$ ②

من العلاقتين ①و② نستنتــج أن:

$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ أي أن : أي $\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

(تتمة التمرين الثاني)

الحالة الأولى : إذاكان $a-b\ge 0$ أي أن $a\ge b$ فإن :

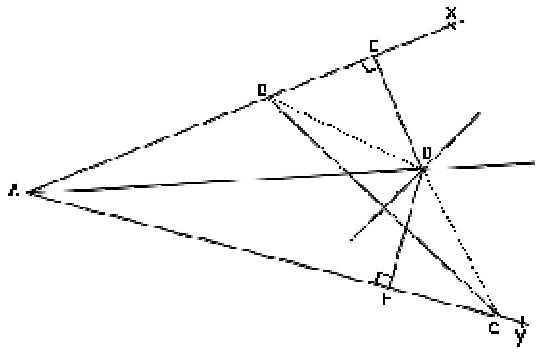
$\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}} \le \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ تعني أن $\frac{a-b}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}} \le \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ وبالتالي $\boxed{n\le m}$

الحالةالثانية: إذاكان $a-b\le 0$ أي أن $a\le b$ فإن :

$\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}} \le \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ تعني أن $\frac{a-b}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}} \ge \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ وبالتالي $\boxed{n\ge m}$

التمرين الثالث

1) لدينا D تنتمي إلى واسط القطعة$[BC]$



إذن : $\boxed{DB=DC}$

لدينا D تنتمي إلى منصف الزاوية $[\widehat{xAy}]$

إذن فهي متساوية المسافة عن حاملي ضلعيها وبالتالي : $\boxed{DE=DF}$

المثلثان DEB وCDF قائما الزاوية على التوالي في E و F .

إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن : $BE^2=DB^2-DE^2=DC^2-DF^2=FC^2$ (لأن $\boxed{DB=DC}$ و $\boxed{DE=DF}$)

$BE^2=FC^2$ إذن : $\boxed{BE=FC}$ ①

خلاصة :

$\begin{cases} DB=DC \\ DE=DF \\ BE=FC \end{cases}$ إذن المثلثان DEB وCDF متقايسان .

2) في المثلثين AED و AFD لدينا $\boxed{DE=DF}$

وبما أنهما قائما الزاوية على التوالي في E و F وحسب مبرهنة فيثاغورس فإن : $AE^2=AD^2-DE^2=AD^2-DF^2=AF^2$ إذن : $\boxed{AE=AF}$ ②

لدينا باستعمال العلاقتين①و② :

$$\begin{aligned} \rightarrow\ BE &= AE-AB \\ &= AF-AB \\ &= (AC-FC)-AB \\ &= AC-BE-AB \\ 2BE &= AC-AB \\ BE &= \frac{1}{2}(AC-AB) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow\ AE &= AB+BE \\ &= AB+FC \\ &= AB+(AC-AF) \\ &= AB+AC-AE \\ 2AE &= AB+AC \\ AE &= \frac{1}{2}(AB+AB) \end{aligned}$$

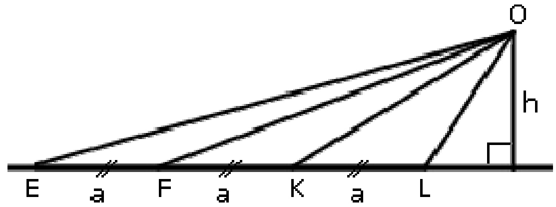
التمرين الرابع

ملحوظة1:

في جميع مراحل التمرين نأخد الخاصية التالية بعين الإعتبار

المثلثات OEF و OFK و OKL لها نفس المساحة

لأن لها نفس الإرتفاع h و $EF = FE = KL$ ومنه فإن :



$$S_{OEF} = S_{OFK} = S_{OKL} = \frac{h \times a}{2} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{h \times 3a}{2}\right) = \frac{1}{3} S_{OEL}$$

كذلك : $S_{OKL} = \frac{1}{2} S_{OEK}$ و $S_{OEK} = \frac{2}{3} S_{OEL}$

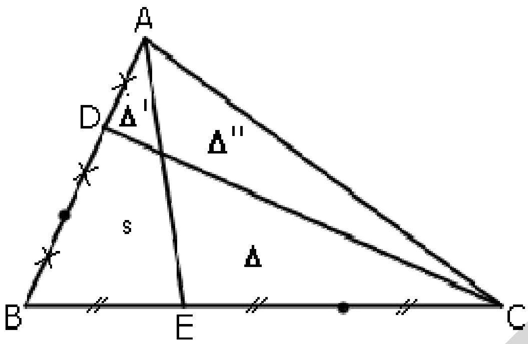
ملحوظة2: الكتابة S_{MTR} مثلا، نعني بها مساحة المثلث MRT

---

1) لنقارن s و "Δ :

لدينا : $\Delta + \Delta'' = \frac{2}{3}\mathbf{S}$ و $\Delta + s = \frac{2}{3}\mathbf{S}$

إذن : $\Delta + s = \Delta + \Delta''$ ومنه فإن $\boxed{s = \Delta''}$



2) لدينا :

$$\Delta + \Delta' + \Delta'' + s = \mathbf{S}$$

$$\Delta - \Delta' + 2\Delta' + \Delta'' + s = \mathbf{S}$$

$$\Delta - \Delta' + (\Delta' + \Delta'') + (\Delta' + s) = \mathbf{S}$$

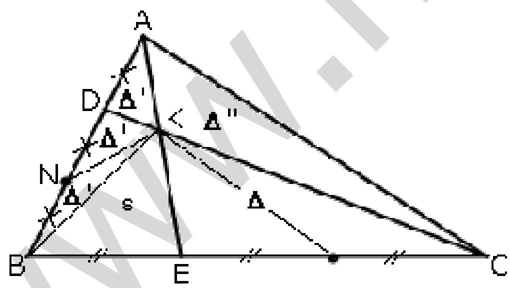
$$\Delta - \Delta' + \frac{1}{3}\mathbf{S} + \frac{1}{3}\mathbf{S} = \mathbf{S}$$

$$\Delta - \Delta' = \mathbf{S} - \frac{2}{3}\mathbf{S}$$

وبالتالـــــــي : $\Delta - \Delta' = \frac{1}{3}\mathbf{S}$

3) لدينا $\Delta - \Delta' = \frac{1}{3}\mathbf{S}$ ① (حسب السؤال الثاني)

ولدينا أيضا : $s = \frac{1}{2} S_{KEC} = \frac{1}{2}\Delta$



المثلثات AKD وDKN وNKB لها نفس الإرتفاع

و $AD = DN = NB$ إذن لها نفس المساحة

لدينا $S_{ABE} = 3\Delta' + s = \frac{1}{3}\mathbf{S}$ إذن $3\Delta' + \frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{3}\mathbf{S}$

أي أن $\Delta' = \frac{1}{9}\mathbf{S} - \frac{1}{6}\Delta$

العلاقة ① تصير : $\Delta - \left(\frac{1}{9}\mathbf{S} - \frac{1}{6}\Delta\right) = \frac{1}{3}\mathbf{S}$ أي أن $\Delta + \frac{1}{6}\Delta = \frac{1}{3}\mathbf{S} + \frac{1}{9}\mathbf{S}$

إذن : $\frac{7}{6}\Delta = \frac{4}{9}\mathbf{S}$

وبالتالي $\mathbf{S} = \frac{21}{8}\Delta$

(الأستاذ عزيز البهجة)

المادة: الرياضيات المستوى :الثالثة ثانوي إعدادي الموسم الدراسي:2010-2011 المدة : ساعتان	# أولمبياد الرياضيات ## المرحلة الأولى	جهة كلميم – سمارة نيابة طانطان ثانوية محمد بن عبد الكريم الخطابي الإعدادية

التمرين 1

1. a، b، k، x و y أعداد حقيقية موجبة غير منعدمة بحيث : $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=k$

بين أن : $\frac{a}{x}=\frac{a+b}{x+y}$

2. ليكن p عدد حقيقي غير منعدم بحيث : $p+\frac{1}{p}=\sqrt{5}$.

أحسب $p^2+\frac{1}{p^2}$ ثم $p^3+\frac{1}{p^3}$

التمرين 2

1. ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث : $a+b=1$.

بين أن $ab-\frac{1}{4}=-\frac{(1-2a)^2}{4}$

2. ليكن t عدد حقيقي موجب بحيث : $\sqrt{t+2}-\sqrt{t-3}=1$

حدد قيمة العدد الحقيقي t .

التمرين 3

E و F نقطتان من (ζ). (ζ) دائرة قطرها [JI]

لتكن M نقطة تقاطع المستقيمين(EJ) و(FI)

لتكن N نقطة تقاطع المستقيمين(IE) و(JF)

- بين أن المستقيم (IJ) عمودي على المستقيم (MN).

التمرين 4

ABC مثلث قائم الزاوية في A . لتكن D منتصف القطعة [AB] و E المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (BC) .

- بين أن $EC^2=AC^2+EB^2$

ذ . عزيز كروان ذ . نعمان موغا

وزارة التربية الوطنية جهة كلميم السمارة نيابة طانطان ثانوية محمد بن عبد الكريم الخطابي الإعدادية	حل مقترح لمباراة الأولمبياد في الرياضيات للسنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي -الفرض الأول-	2011/2010 أرسل من طرف الأستاذ عزيز كروان التصحيح من اقتراح لخريسي سمير www.naja7math.com

تمرين 1 :

1) لدينا : $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=k$ إذن : $a=kx$ و $b=ky$ منه: $\frac{a+b}{x+y}=\frac{kx+ky}{x+y}=\frac{k(x+y)}{x+y}=k=\frac{a}{x}$

2) لدينا: $p+\frac{1}{p}=\sqrt{5}$ منه: $\left(p+\frac{1}{p}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$ منه: $p^2+2\times p\times\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p}\right)^2=5$

منه: $p^2+2+\frac{1}{p^2}=5$ بالتالي: $\boxed{p^2+\frac{1}{p^2}=5-2=3}$

لدينا الآن: $p+\frac{1}{p}=\sqrt{5}$ و $p^2+\frac{1}{p^2}=3$ إذن: $\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)\times\left(p+\frac{1}{p}\right)=3\times\sqrt{5}$

أي: $p^3+p+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^3}=3\sqrt{5}$ أي: $p^3+\sqrt{5}+\frac{1}{p^3}=3\sqrt{5}$

بالتالي: $\boxed{p^3+\frac{1}{p^3}=3\sqrt{5}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}}$

تمرين 2 :

-1 للبرهان على المتساوية سنحسب الفرق:

$$ab-\frac{1}{4}-\left(-\frac{(1-2a)^2}{4}\right)=ab-\frac{1}{4}+\frac{(1-2a)^2}{4}=\frac{4ab-1+1-4a+(2a)^2}{4}=\frac{4ab-4a+4a^2}{4}$$

$$=\frac{4a(b-1+a)}{4}=a(b+a-1)=a(1-1)=0$$

-2 لدينا: $\sqrt{t+2}-\sqrt{t-3}=1$ منه: $\left(\sqrt{t+2}-\sqrt{t-3}\right)\left(\sqrt{t+2}+\sqrt{t-3}\right)=1\times\left(\sqrt{t+2}+\sqrt{t-3}\right)$

منه: $(t+2)-(t-3)=\sqrt{t+2}+\sqrt{t-3}$ أي: $t+2-t+3=\sqrt{t+2}+\sqrt{t-3}$

منه: $5=\sqrt{t+2}+\sqrt{t-3}$ أو أيضا: $\sqrt{t+2}+\sqrt{t-3}=5$

و بجمع طرفي هذه المتساوية مع متساوية المعطيات طرفا بطرف نجد: $2\sqrt{t+2}=6$

منه: $\sqrt{t+2}=3$ منه: $\left(\sqrt{t+2}\right)^2=3^2$ أي: $t+2=9$ بالتالي: $\boxed{t=7}$

يمكنك التأكد بسهولة من صحة الحل $t=7$ لأن: $\sqrt{7+2}-\sqrt{7-3}=\sqrt{9}-\sqrt{4}=3-2=1$

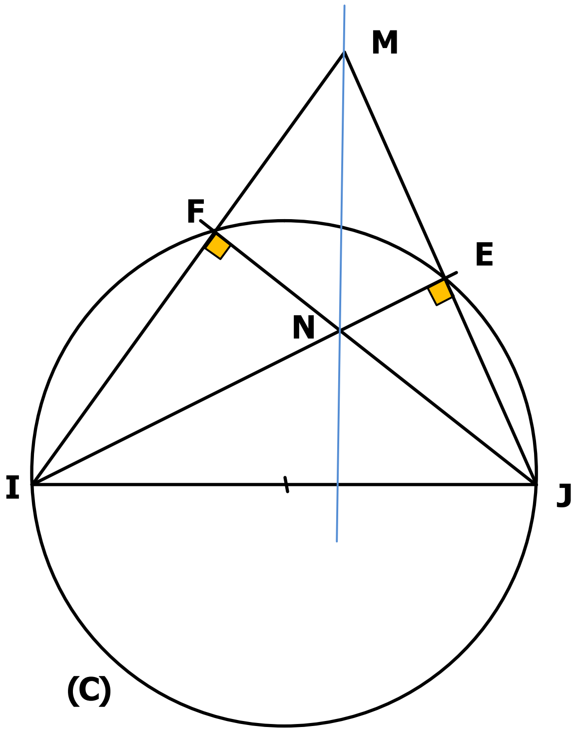
تمرين 3 :

بما أن $[IJ]$ قطر للدائرة (C) و $E\in(C)$ و $F\in(C)$

فإن المثلثين IEJ و IFJ مثلثان قائمي الزاوية على التوالي في E و F

إذن المستقيميان (IE) و (JF) يمثلان ارتفاعين في المثلث IJM

و بما أننا نعلم أن ارتفاعات أي مثلث تتلاقا في نقطة واحدة(مركز التعامد) فإن المستقيم (MN) سيمثل الارتفاع الثالث، بالتالي: $(MN)\perp(IJ)$



تمرين 2 :

3- للبرهان على المتساوية سنحسب الفرق:

$$ab-\frac{1}{4}-\left(-\frac{(1-2a)^2}{4}\right)=ab-\frac{1}{4}+\frac{(1-2a)^2}{4}=\frac{4ab-1+1-4a+(2a)^2}{4}=\frac{4ab-4a+4a^2}{4}$$

$$=\frac{4a(b-1+a)}{4}=a(b+a-1)=a(1-1)=0$$

4- لدينا: $\sqrt{t+2}-\sqrt{t-3}=1$ منه: $\left(\sqrt{t+2}-\sqrt{t-3}\right)\left(\sqrt{t+2}+\sqrt{t-3}\right)=1\times\left(\sqrt{t+2}+\sqrt{t-3}\right)$

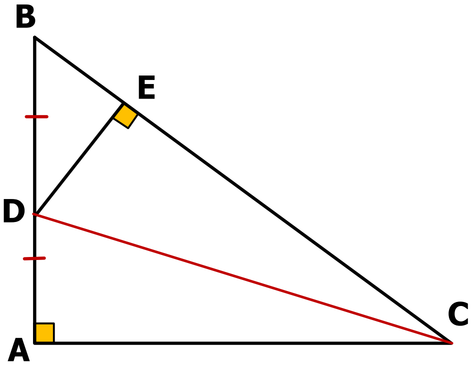
منه: $(t+2)-(t-3)=\sqrt{t+2}+\sqrt{t-3}$ أي: $t+2-t+3=\sqrt{t+2}+\sqrt{t-3}$

منه: $5=\sqrt{t+2}+\sqrt{t-3}$ أو أيضا: $\sqrt{t+2}+\sqrt{t-3}=5$

و بجمع طرفي هذه المتساوية مع متساوية المعطيات طرفا بطرف نجد: $2\sqrt{t+2}=6$

منه: $\sqrt{t+2}=3$ منه: $\left(\sqrt{t+2}\right)^2=3^2$ أي: $t+2=9$ بالتالي: $\boxed{t=7}$

يمكنك التأكد بسهولة من صحة الحل $t=7$ لأن: $\sqrt{7+2}-\sqrt{7-3}=\sqrt{9}-\sqrt{4}=3-2=1$

تمرين 4 : **لنبين أن:** $EC^2 = AC^2 + EB^2$ **باستعمال مبرهنة فيثاغورس المباشرة على التوالي في كل من المثلثات القائمة الزاوية:** EDC **و** ADC **و** BED **نجد:** $EC^2 = DC^2 - ED^2 \quad (1)$ **و** $DC^2 = AC^2 + AD^2 \quad (2)$ **و** $EB^2 = BD^2 - ED^2 \quad (3)$ **من** (1) **و** (2) **نستنتج أن:** $EC^2 = AC^2 + AD^2 - ED^2$ **و بما أن:** $AD = BD$ **فإن:** $EC^2 = AC^2 + BD^2 - ED^2$ **و باستعمال** (3) **نستنتج أن:** $\boxed{EC^2 = AC^2 + EB^2}$	

رياضيــات النجـــــــاح

www.naja7math.com

الجمعة 26 نونبر 2010 من 30: 14^h إلى 17^h	مباراة الأولمبياد في الرياضيات للسنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي *- المرحلة الأولـى -* الفرض الأول	وزارة التربية الوطنية أكاديمية وحدة نيابة تاوريرت الثانوية الإعدادية المغرب العربي

تمرين 1 :

◈ **بين أن:** $3333^2 + 4444^2 = 5555^2$

تمرين 2 :

x **عدد حقيقي موجب قطعا حيث:** $x + \frac{1}{x} = 7$ ، **احسب:** $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

تمرين 3 :

$ABCD$ **شبه منحرف حيث** $(AB)//(CD)$ **و** $AB < CD$

الموازي لـ (AC) **و المار من** B **يقطع** (AD) **في** M

الموازي لـ (BD) **و المار من** A **يقطع** (BC) **في** N

◈ **بين أن:** $(MN)//(AB)$

تمرين 4 :

ABC **مثلث قائم الزاوية في** A **. بين أن:** $AB^4 + AC^4 < BC^4$

من اقتراح
أذ: *سمير لخريسي*

2010/ 11 / 26 لخريسي سمير www.naja7math.com	حل مقترح لمباراة الأولمبياد في الرياضيات للسنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي -المرحلة الأولــى- الفرض الأول	وزارة التربية الوطنية أكاديمية وجدة نيابة تاوريرت الثانوية الإعدادية المغرب العربي

تمرين 1: لنبين أن: $3333^2 + 4444^2 = 5555^2$

لدينا :
$$3333^2 + 4444^2 = (1111\times 3)^2 + (1111\times 4)^2 = 1111^2\times 3^2 + 1111^2 \times 4^2$$
$$= 1111^2\times 9 + 1111^2\times 16 = 1111^2\times(9+16) = 1111^2\times 25$$
$$= 1111^2\times 5^2 = (1111\times 5)^2 = 5555^2$$

تذكر أن: $(ab)^n = a^n b^n$

تمرين 2: لنحسب : $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

لدينا: $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x}\times\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x+2+\dfrac{1}{x} = x+\dfrac{1}{x}+2 = 7+2 = 9$

بالتالي : $\boxed{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{9} = 3}$

تمرين 3:

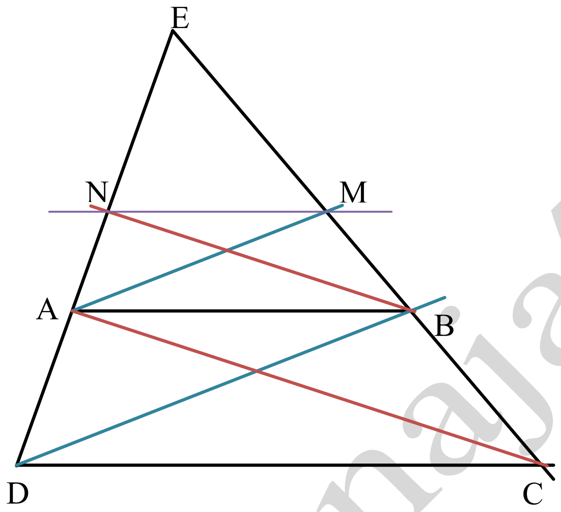
باستعمال مبرهنة طاليس المباشرة في المثلثات EDB و EDC و EAC نحصل على المتساويات:

$$\frac{EA}{ED} = \frac{EM}{EB} \quad \text{و} \quad \frac{EB}{EC} = \frac{EA}{ED} \quad \text{و} \quad \frac{EN}{EA} = \frac{EB}{EC}$$

و من هذه المتساويات الثلاث نستنتج أن:

$$\frac{EM}{EB} = \frac{EN}{EA}$$

و هكذا باستعمال مبرهنة طاليس العكسية في المثلث EAB نستنتج أن: $\boxed{(MN)//(AB)}$



يتوجب عليك طبعا تذكر شروط تطبيق خاصية طاليس المباشرة في كل مثلث.

تمرين 4: لنبين أن $AB^4 + AC^4 < BC^4$

لدينا: ABC مثلث قائم الزاوية في A منه: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

و هكذا نجد أن:
$$BC^4 - (AB^4 + AC^4) = (BC^2)^2 - AB^4 - AC^4$$
$$= (AB^2 + AC^2)^2 - AB^4 - AC^4$$
$$= (AB^2)^2 + 2\times AB^2\times AC^2 + (AC^2)^2 - AB^4 - AC^4$$
$$= AB^4 + 2\times AB^2\times AC^2 + AC^4 - AB^4 - AC^4$$
$$= 2\times AB^2 \times AC^2 > 0$$

وبالتالي: $\boxed{BC^4 > AB^4 + AC^4}$

لتبسيط الحساب يمكنك أن تضع مثلا: $AB = x$ و $AC = y$ و $BC = z$

رياضيــات النجـــــــاح
www.naja7math.com

منارة الفردوس أولمبياد الرياضيات

إقصائيات محلية 2011 -2012 للسنة الثالثة إعدادي المدة : ساعتان

(لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة)

التمرين الأول (6نقط)

احسب:

$$A = (0,125)^{1006} \times \left(2\sqrt{2}\right)^{2012}$$

$$B = \sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+2} + \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

$$C = \sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}} \quad ، \quad D = \frac{20^{10}-10^{10}}{200^{5}-10^{10}}$$

التمرين الثاني (4نقط)

a عدد حقيقي غير منعدم حيث : $a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{5}$

احســـــب $a^2 + \frac{1}{a^2}$ واستنتج حساب $a - \frac{1}{a}$

التمرين الثالث (4نقط)

a عدد حقيقي موجب .نضـــــع : $K = \dfrac{\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{a}+\frac{a}{4}}}$

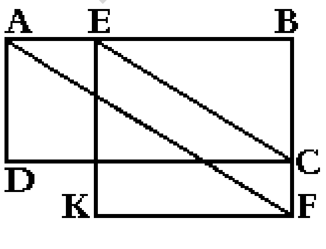
احســــب K (قيمة العدد K غير مرتبطة بالعدد a)

التمرين الرابع (3نقط)

في الشكل جانبه المستطيلان

$ABCD$ و $EBFK$ لهما نفس المساحة

برهن أن: $(AF) // (EC)$



التمرين الخامس(3نقط)

a و b عددان حقيقيان مختلفان وغير منعدمين حيث :$a^2+b^2 = 18ab$

احسب النسبة : $\frac{a+b}{a-b}$

منارة الفردوس   أولمبياد الرياضيات

إقصائيات محلية 2011 -2012 للسنة الثالثة إعدادي   **عناصر الإجابة**

التمرين الأول

$$A=(0,125)^{1006}\times\left(2\sqrt{2}\right)^{2012}=(0,125)^{1006}\times\left[\left(2\sqrt{2}\right)^{2}\right]^{1006}=(0,125\times 8)^{1006}=1^{1006}=1$$

$$B=\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^{2}-\sqrt{2}^{2}+2}+\frac{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{3}^{2}-\sqrt{5}^{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^{2}}-\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)=0$$

$$C=\left(1-\sqrt{2}\right)\sqrt{2\times\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)}=\left(1-\sqrt{2}\right)\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\left(1-\sqrt{2}\right)\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2}}=\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=-1$$

$$D=\frac{20^{10}-10^{10}}{200^{5}-10^{10}}=\frac{2^{10}\times 10^{10}-10^{10}}{2^{5}\times 10^{10}-10^{10}}=\frac{10^{10}\times\left(2^{10}-1\right)}{10^{10}\times\left(2^{5}-1\right)}=\frac{\left(2^{5}+1\right)\times\left(2^{5}-1\right)}{\left(2^{5}-1\right)}=2^{5}+1=33$$

التمرين الثاني

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^{2}=\left(2\sqrt{5}\right)^{2}$ إذن : $a^{2}+2+\frac{1}{a^{2}}=20$ وبالتالي $a^{2}+\frac{1}{a^{2}}=18$

$a^{2}+\frac{1}{a^{2}}=18$ إذن : $a^{2}-2+\frac{1}{a^{2}}=18-2=16$ أي أن $\left(a-\frac{1}{a}\right)^{2}=16$

وبالتالي $a-\frac{1}{a}=4$ أو $a-\frac{1}{a}=-4$

التمرين الثالث

$$K=\frac{\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{a}+\frac{a}{4}}}=\frac{\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{4+4\sqrt{a}+a}{4}}}=\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{\left(\sqrt{a}+2\right)^{2}}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

التمرين الرابع

المستطيلان $ABCD$ و $EBFK$ لهما نفس المساحة إذن: $BA\times BC=BE\times BF$ أي أن $\frac{BA}{BE}=\frac{BF}{BC}$

إذن باستعمال مبرهنة طاليس العكسية وشروطها على المثلث ABF نجد أن $(EC)//(AF)$

التمرين الخامس

$a^{2}+b^{2}=18ab$ إذن $(a+b)^{2}=20ab$ و $(a-b)^{2}=16ab$ ومنه فإن : $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{2}=\frac{5}{4}$

إذن : $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ أو $\frac{a+b}{a-b}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

bahja.aziz
azizpromath@hotmail.com

وزارة التربية الوطنية **أكاديمية وجدة** **نيابة تاوريرت**	**مباراة الأولمبياد في الرياضيات** **للسنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي** ***- المرحلة الأولــى-***	**الجمعة 27 مارس 2009** **من 30: 14^h إلى 30: 17^h**

تمرين 1 : a **و** b **و** c **أعداد حقيقية موجبة.**

◈ **أثبت أن :** $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ **ثم استنتج أن** $a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$

تمرين 2 : x **و** y **عددان صحيحان طبيعيان بحيث :** $x=a^2+b^2$ **و** $y=c^2+d^2$
مع a **و** b **و** c **و** d **أعداد صحيحة نسبية.**

◈ **بين أنه يوجد عددان صحيحان نسبيان** m **و** n **بحيث :** $xy=m^2+n^2$

تمرين 3 : x **و** y **و** z **و** a **و** b **و** c **أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث :**

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

◈ **بين أن :** $\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}=\sqrt{(a+b+c)(x+y+z)}$

تمرين 4 : $ABCD$ **مستطيل بحيث** $AB=10$ **و** $AD=5$ **و** E **نقطة من** $[AD]$
حيث $AE=2$
المستقيم المار من E **و الموازي للمستقيم** (CD) **يقطع** $[BD]$ **في** F **.**

◈ **احسب** FD **(بعد إنشاء الشكل)**

تمرين 5 : ABC **مثلث متساوي الساقين في الرأس** A **بحيث :** $AB=a$ **و**
$BC=b$ **و** H **المسقط العمودي للنقطة** A **على** (BC)**.**
لتكن M **نقطة من** $[BC]$ **تخالف** B **و** C **و** H **.**

◈ **احسب** $ML+MK$ **بدلالة** a **و** b **علما أن** K **و** L **هما المسقطان العموديان للنقطة** M **على** (AB) **و** (AC) **على التوالي**

* إنشاء الشكل في ورقة التحرير (التمرينان 4 و 5)
* 4 نقط لكل تمرين
* تقدم الأدلة في ورقة التحرير
* إقرأ النص جيدا لمعرفة المطلوب من التمرين

تمرين 1 :

لدينا : $a+b-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ إذن : $a+b\geq 2\sqrt{ab}$

و بنفس الطريقة نبين أن : $b+c\geq 2\sqrt{bc}$ و $a+c\geq 2\sqrt{ac}$

بجمع المتفاوتات الثلاث طرفا بطرق نحصل على : $a+b+b+c+a+c\geq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}$

أي : $2(a+b+c)\geq 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\right)$ بالتالي : $\boxed{a+b+c\geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}}$

تمرين 2 :

لدينا : $x=a^2+b^2$ و $y=c^2+d^2$ منه :

$$xy=\left(x^2+y^2\right)\left(c^2+d^2\right)$$
$$xy=x^2c^2+x^2d^2+y^2c^2+y^2d^2$$
$$xy=\left(x^2c^2+y^2d^2\right)+x^2d^2+y^2c^2$$
$$xy=\left(x^2c^2+2xcyd+y^2d^2\right)+\left(x^2d^2-2xcyd+y^2c^2\right)$$
$$xy=(xc+yd)^2+(xd-yc)^2$$

إذن : $xy=m^2+n^2$ حيث : $m=xc+yd$ و $n=xd-yc$ و التي هي أعداد صحيحة نسبية

تمرين 3 :

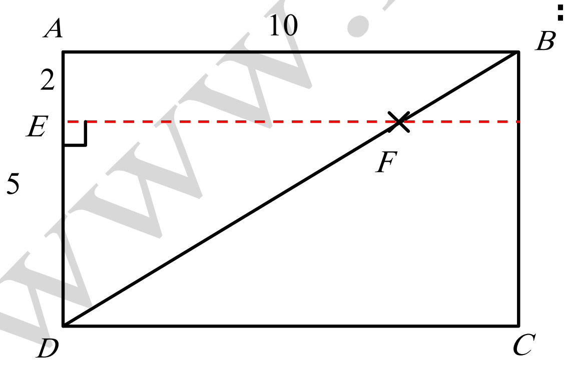
لدينا : $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ ، نضع : $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ منه : $x=ka$ و $y=kb$ و $z=kc$

منه : $\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}=\sqrt{aka}+\sqrt{bkb}+\sqrt{ckc}=a\sqrt{k}+b\sqrt{k}+c\sqrt{k}=\sqrt{k}(a+b+c)$

و $\sqrt{(a+b+c)(x+y+z)}=\sqrt{(a+b+c)(ka+kb+kc)}=\sqrt{(a+b+c)k(a+b+c)}=(a+b+c)\sqrt{k}$

بالتالي: $\boxed{\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}=\sqrt{(a+b+c)(x+y+z)}}$

تمرين 4 :



لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة في المثلث ABD :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 100+25$$
$$BD=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$$

و باستعمال مبرهنة طاليس المباشرة في المثلث ABD

نستنتج إذن أن : $\frac{DF}{DB}=\frac{DE}{DA}$

منه : $\boxed{FD=\frac{DB\times DE}{DA}=\frac{5\sqrt{5}\times(5-2)}{5}=3\sqrt{5}}$

رياضيـــات النجـــــــاح
www.naja7math.com

تمرين 5 :

لدينا : $S_{ABC} = S_{AMB} + S_{AMC}$

و بما أن $S_{ABC} = \dfrac{BC \times AH}{2} = \dfrac{a \times AH}{2}$

و $S_{AMD} = \dfrac{AC \times ML}{2} = \dfrac{b \times ML}{2}$ و $S_{AMB} = \dfrac{AB \times MK}{2} = \dfrac{b \times MK}{2}$

فإن: $\dfrac{b \times ML}{2} + \dfrac{b \times MK}{2} = \dfrac{a \times AH}{2}$

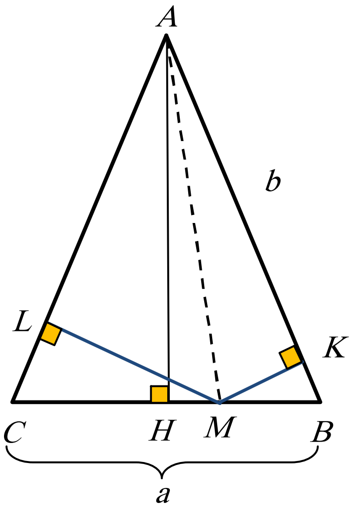
منه : $b(ML + MK) = a \times AH$ أي : $ML + MK = \dfrac{a \times AH}{b}$

و لدينا في المثلث القائم الزاوية AHB : $AB^2 = AH^2 + HB^2$

منه : $AH^2 = AB^2 - HB^2 = b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{4b^2 - a^2}{4}$

منه : $AH = \dfrac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$

بالتالي: $\boxed{ML + MK = \dfrac{a \times \sqrt{4b^2 - a^2}}{2\,b}}$



منارة الفردوس **أولمبياد الرياضيات** 2011 -2012

للسنة الثالثة إعدادي — المدة : ساعة ونصف

الفرض الثاني — من إعداد الأ ستاذ: البهجة عزيز

(لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة)

التمرين الأول(5 نقط)

a وb وc أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية مساحته $\frac{5}{4}$ حيث : $a+b=\sqrt{41}$

نضع : $t=\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}$ و ليكن c طول الوتر.

احسب t .

التمرين الثاني(5 نقط)

a وb عددان حقيقيان موجبان حيث : $a\times b=2$

برهن أن : $a^3+b^3\geq 4\sqrt{2}$

التمرين الثالث (5 نقط)

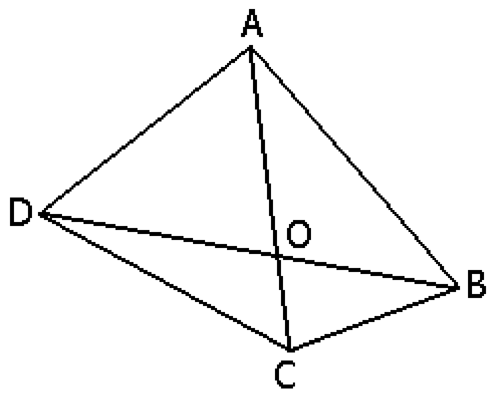
a وb عددان حقيقيان و b غير منعدم حيث : $(a-b)(3a-2b)=ab$

احسب : $\frac{a}{b}$

التمرين الرابع(5 نقط)

في الشكل أسفله $ABCD$ رباعي محيطه p. وقطراه يتقاطعان في النقطة O.

برهن أن : $\frac{p}{2}\prec AC+DB\prec p$



التمرين الأول

المثلث قائم الزاوية وطول وتره هو c

إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن : $c^2 = a^2 + b^2$

لدينا : $t = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} = \frac{c^2 + c^2}{abc} = \frac{2c^2}{abc} = \frac{2c}{ab}$

← حساب ab :

مساحة المثلث هي $\frac{5}{4}$ إذن : $\frac{ab}{2} = \frac{5}{4}$ وبالتالي $ab = \frac{5}{2}$

← حساب c :

لدينا : $a + b = \sqrt{41}$ إذن :

$$(a+b)^2 = \sqrt{41}^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 41$$
$$a^2 + b^2 = 41 - 2ab$$
$$c^2 = 41 - 2\times\frac{5}{2}$$
$$c^2 = 41 - 5 = 36$$

$\begin{cases} c^2 = 36 \\ c \succ 0 \end{cases}$ إذن : $c = \sqrt{36} = 6$

وبالتالي : $t = \frac{2c}{ab} = \frac{2\times 6}{\frac{5}{2}} = \frac{24}{5} = 4,8$ إذن : $\boxed{t = 4,8}$

التمرين الثاني

$a \times b = 2$ إذن : $b = \frac{2}{a}$

لدينا :

$$a^3 + b^3 - 4\sqrt{2} = a^3 + \left(\frac{2}{a}\right)^3 - 4\sqrt{2} = \frac{\left(a^3\right)^2 - 2\times 2\sqrt{2}a^3 + \left(2\sqrt{2}\right)^2}{a^3} = \frac{(a^3 - 2\sqrt{2})^2}{a^3}$$

$(a^3 - 2\sqrt{2})^2 \geq 0$ و $a^3 \succ 0$ (لأن a موجب و $a \times b \neq 0$)

إذن $\frac{(a^3 - 2\sqrt{2})^2}{a^3} \geq 0$ وبالتالي : $\boxed{a^3 + b^3 \geq 4\sqrt{2}}$

التمرين الثالث

لدينا: $(a - b)(3a - 2b) = ab$ إذن : $3a^2 - 2ab - 3ab + 2b^2 = ab$

أي أن $3a^2 - 6ab + 2b^2 = 0$

ومنه فإن $3a^2 - 6ab + 3b^2 = b^2$

إذن : $3(a - b)^2 = b^2$

نستنتج إذن أن: $\left(\frac{a - b}{b}\right)^2 = \frac{1}{3}$ أي أن $\left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 = \frac{1}{3}$

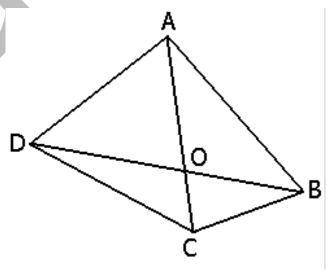
$\left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 = \frac{1}{3}$ إذن : $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$ أو $\frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{3} + 1$

ملاحظة :

هناك طرق أخرى من بينها استعمال معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد :

تحول العلاقة إلى المعادلة: $x^2 - 2x + \frac{2}{3} = 0$ حيث : $x = \frac{a}{b}$.

التمرين الرابع



بتطبيق المتفاوتة المثلثية على المثلثات

: AOB ،BOC ،COD ،DOA نجد أن :

إذن : $\begin{cases} AB \prec OA + OB \\ BC \prec OB + OC \\ DC \prec OC + OD \\ AD \prec OD + OA \end{cases}$

$AB + BC + DC + AD \prec 2(OA + OC + OB + OD)$

$p \prec 2(AC + DB)$

$\frac{p}{2} \prec AC + DB$

بتطبيق المتفاوتة المثلثية على المثلثات: ABC ،ADC ،ABD ،DCB نجد أن :

إذن : $\begin{cases} AC \prec AB + BC \\ AC \prec AD + DC \\ DB \prec AD + AB \\ DB \prec DC + BC \end{cases}$

$2(AC + DB) \prec 2(AB + BC + DC + AD)$

$AC + DB \prec AB + BC + DC + AD$

$AC + DB \prec P$

إذن : $\begin{cases} \frac{p}{2} \prec AC + DB \\ AC + DB \prec p \end{cases}$

$\boxed{\frac{p}{2} \prec AC + DB \prec p}$

bahja.aziz