Exercice 1

calcul de : $E = a^8 - 4a^6 + 4a^4$

On a : $a^2 = \left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{5}}}\right)^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{5}}$

Et : $a^4 = \left(1+\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)^2 = 1+2\sqrt{1+\sqrt{5}}+\left(1+\sqrt{5}\right) = 2+\sqrt{5}+2\sqrt{1+\sqrt{5}}$

D'autre part : $x^8 - 4x^6 + 4x^4 = x^4\left(x^4-4x^2+4\right) = x^4\left(x^2-2\right)^2$

Par conséquent : $x^8 - 4x^6 + 4x^4 = \left(2+\sqrt{5}+2\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)\left(1+\sqrt{1+\sqrt{5}}-2\right)^2$

$$x^8 - 4x^6 + 4x^4 = \left(2+\sqrt{5}+2\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{5}}-1\right)^2$$

$$x^8 - 4x^6 + 4x^4 = \left(2+\sqrt{5}+2\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)\left(1+\sqrt{5}+1-2\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)$$

$$x^8 - 4x^6 + 4x^4 = \left(2+\sqrt{5}+2\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)\left(2+\sqrt{5}-2\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)$$

$$x^8 - 4x^6 + 4x^4 = \left(2+\sqrt{5}\right)^2-\left(2\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)^2$$

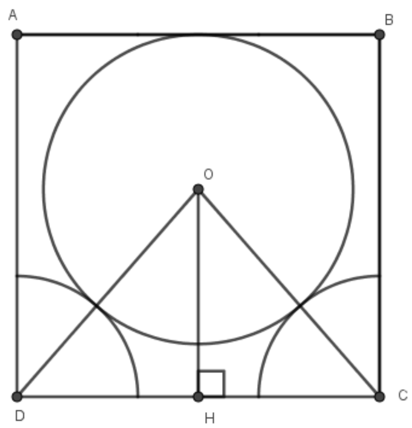
$$x^8 - 4x^6 + 4x^4 = 4+5+4\sqrt{5}-4\left(1+\sqrt{5}\right)$$

$$x^8 - 4x^6 + 4x^4 = 4+5+4\sqrt{5}-4-4\sqrt{5}$$

$$x^8 - 4x^6 + 4x^4 = 5$$

$$E = 5$$

Exercice 2



Considérons le triangle isocèle DOC .

Soit (OH) la hauteur de ce triangle.

Dans le triangle rectangle OHD , d'après la relation de Pythagore :

$$OD^2 = DH^2 + OH^2$$

$$(a+r)^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + (r+3a-2r)^2$$

$$a^2 + 2ar + r^2 = \frac{9a^2}{4} + (3a-r)^2$$

$$a^2 + 2ar + r^2 = \frac{9a^2}{4} + 9a^2 - 6ar + r^2$$

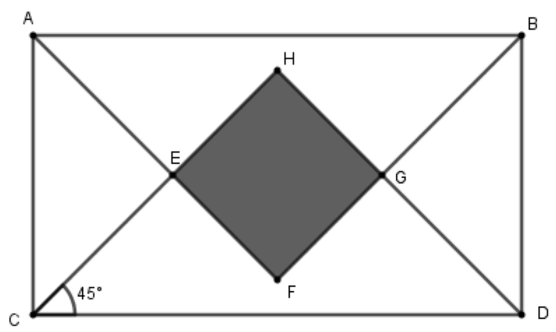
$$2ar + 6ar = \frac{9a^2}{4} + 8a^2$$

$$8ar = \frac{9a^2 + 32a^2}{4}$$

$$8ar = \frac{41a^2}{4}$$

$$r = \frac{41}{32}a$$

Exercice 3



Montrons que : $FH = MA + MB$

- Dans le triangle rectangle CHD

$$\sin 45^0 = \frac{HD}{CD}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{HD}{a}$$

$$HD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

- Dans le triangle rectangle BDG

$$\cos 45^0 = \frac{DG}{DB}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{DG}{b}$$

$$DG = \frac{\sqrt{2}}{2}b$$

- D'autre part : $HG = HD - DG$

$$HG = \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2}b$$

$$HG = \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$$

- Or l'aire du carré grisée est :

$$A = HG^2$$

$$A = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)\right]^2$$

$$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(a-b)^2$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(a-b)^2}$$