Exercice 1

Calculons le carré de chaque terme.

- $$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^2 = a+\sqrt{b}$$
- $$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2 = \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} + 2\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\right)}$$

$$= a+2\sqrt{\frac{a^2-\left(\sqrt{a^2-b}\right)^2}{4}}$$

$$= a+2\sqrt{\frac{a^2-a^2+b}{4}}$$

$$= a+2\frac{\sqrt{b}}{2}$$

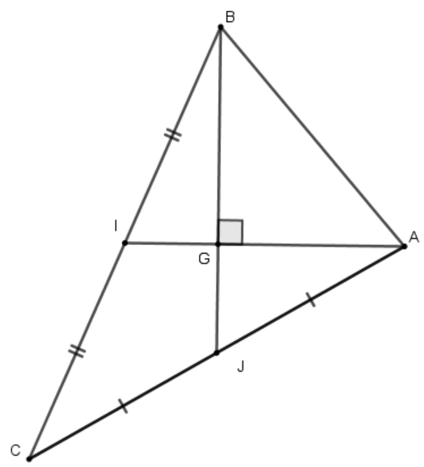
$$= a+\sqrt{b}$$

Donc : $$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Exercice 2

On a : $CA = 2JA$ et $CB = 2IB$

Et d'après le théorème de la droite des milieux. $IJ = \dfrac{AB}{2}$



Alors : $$CA^2 + CB^2 = (2JA)^2 + (2IB)^2$$

$$CA^2 + CB^2 = 4\left(JA^2 + IB^2\right)$$

Dans le triangle rectangle JAG , d'après le théorème de Pythagore :

$$JA^2 = JG^2 + GA^2$$

Dans le triangle rectangle IGB , d'après le théorème de Pythagore :

$$IB^2 = IG^2 + GB^2$$

Donc : $$CA^2 + CB^2 = 4\left(JG^2 + GA^2 + IG^2 + GB^2\right)$$

$$CA^2 + CB^2 = 4\left(\underbrace{JG^2 + IG^2}_{IJ^2} + \underbrace{GA^2 + GB^2}_{AB^2}\right)$$

$$CA^2 + CB^2 = 4\left(IJ^2 + AB^2\right)$$

$$CA^2 + CB^2 = 4\left(\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + AB^2\right)$$

$$CA^2 + CB^2 = 4\left(\frac{5AB^2}{4}\right)$$

$$\boxed{CA^2 + CB^2 = 5AB^2}$$

Exercice 3

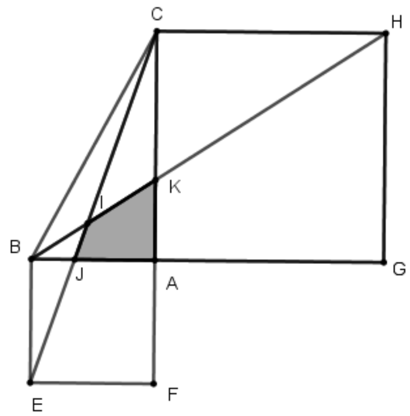
1.

- Dans le triangle rectangle BHG, d'après le théorème de Thales.

$$\frac{BA}{BG} = \frac{BK}{BH} = \frac{AK}{GH}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{AK}{b} \qquad (GH = AG = b)$$

Donc : $\boxed{AK = \frac{ab}{a+b}}$



- Soit A_{ABK} l'aire du triangle ABK.

$$A_{ABK} = \frac{AB \times AK}{2} = \frac{a}{2} \times \frac{ab}{a+b} = \frac{a^2b}{2(a+b)}$$

2. Dans le triangle rectangle ECF, d'après le théorème de Thales.

$$\frac{CA}{CF} = \frac{CJ}{CE} = \frac{JA}{EF}$$

$$\frac{b}{a+b} = \frac{JA}{a}$$

$$JA = \frac{ab}{a+b}$$

$$A_{JAC} = \frac{JA \times AC}{2} = \frac{a^2 b}{2(a+b)}$$

$$A_{BJC} = A_{ABC} - A_{JAC}$$

$$A_{BJC} = \frac{ab}{2} - \frac{a^2 b}{2(a+b)}$$

$$A_{BJC} = \frac{ab(a+b) - a^2 b}{2(a+b)}$$

$$A_{BJC} = \frac{a^2 b}{2(a+b)}$$

Donc : $A_{BJC} = A_{ABK}$

Et par conséquent : $A_{IBC} = A_{BJC} - A_{JBI}$

$$A_{IBC} = A_{ABK} - A_{JBI}$$

$$\boxed{A_{IBC} = A_{AJIK}}$$