Exercice 1

1. $a=\frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}+2$

$$b=3\left(5-2\sqrt{5}\right)-\left(3\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}-2\right)$$
$$b=15-6\sqrt{5}-\left(15-6\sqrt{5}-\sqrt{5}+2\right)$$
$$b=15-6\sqrt{5}-15+6\sqrt{5}+\sqrt{5}-2$$
$$b=\sqrt{5}-2$$

$$c=\sqrt{20}+\sqrt{4}-\sqrt{45}$$
$$c=\sqrt{4}\times\sqrt{5}+2-\sqrt{9}\times\sqrt{5}$$
$$c=2\sqrt{5}+2-3\sqrt{5}$$
$$c=2-\sqrt{5}$$

2. On a : $a\times b=\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)$

$$=\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2=1$$

Donc a est l'inverse de b .

3. $1-\frac{a}{b}=1-\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}=1-\frac{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}$

$$=1-\left(5+4\sqrt{5}+4\right)=-8-4\sqrt{5}$$

$$\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}=\sqrt{5}-2$$

$$\frac{2}{a}-\frac{\sqrt{5}}{b}=\frac{2}{\sqrt{5}+2}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}=\frac{2\left(\sqrt{5}-2\right)-\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}$$

$$=2\sqrt{5}-4-5-2\sqrt{5}=-9$$

4. $2a^2+b^2+c^2=2\left(\sqrt{5}+2\right)^2+\left(\sqrt{5}-2\right)^2+\left(2-\sqrt{5}\right)^2$

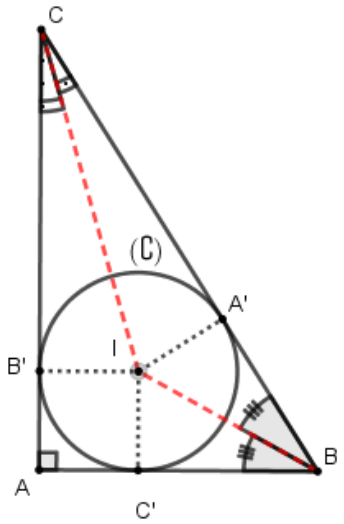
$$=2\left(5+4\sqrt{5}+4\right)+\left(5-4\sqrt{5}+4\right)+\left(4-4\sqrt{5}+5\right)$$
$$=18+8\sqrt{5}+9-4\sqrt{5}+9-4\sqrt{5}$$
$$=36$$

Exercice 2

1.

Le quadrilatère $AC'IB'$ a trois angles droits et deux côtés successifs IB' et IC' égaux.

C'est donc un carré.



On a : $2r = AB' + AC'$

$$2r = (AC - CB') + (AB - BC')$$

$$2r = (AC + AB) - (CB' + BC')$$

$$2r = b + c - (CB' + BC')$$

Or : $CB' = CA'$ et $BC' = BA'$

Et : $BA' + CA' = BC = a$

D'où : $2r = b + c - a$

$$\boxed{r = \frac{1}{2}(b + c - a)}$$

2.

On applique la formule précédente aux trois triangles PQH , PQR et PRH .

$$2r_1 = PH + QH - PQ$$

$$2r_2 = PR + PQ - QR$$

$$2r_3 = RH + PH - PR$$

D'où : $2(r_1 + r_2 + r_3) = 2PH + QH + RH - QR$

Or : $QH + RH = QR$

Donc : $2(r_1 +_2 + r_3) = 2PH$

$$\boxed{r_1 +_2 + r_3 = PH}$$