Exercice 1 calcul de : $E = a^8 - 4a^6 + 4a^4$

On a : $a^2 = \left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{5}}}\right)^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{5}}$

Et : $a^4 = \left(1+\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)^2 = 1+2\sqrt{1+\sqrt{5}}+\left(1+\sqrt{5}\right)=2+\sqrt{5}+2\sqrt{1+\sqrt{5}}$

D'autre part : $x^8 - 4x^6 + 4x^4 = x^4\left(x^4-4x^2+4\right) = x^4\left(x^2-2\right)^2$

Par conséquent : $x^8 - 4x^6 + 4x^4 = \left(2+\sqrt{5}+2\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)\left(1+\sqrt{1+\sqrt{5}}-2\right)^2$

$$x^8 - 4x^6 + 4x^4 = \left(2+\sqrt{5}+2\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{5}}-1\right)^2$$

$$x^8 - 4x^6 + 4x^4 = \left(2+\sqrt{5}+2\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)\left(1+\sqrt{5}+1-2\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)$$

$$x^8 - 4x^6 + 4x^4 = \left(2+\sqrt{5}+2\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)\left(2+\sqrt{5}-2\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)$$

$$x^8 - 4x^6 + 4x^4 = \left(2+\sqrt{5}\right)^2-\left(2\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)^2$$

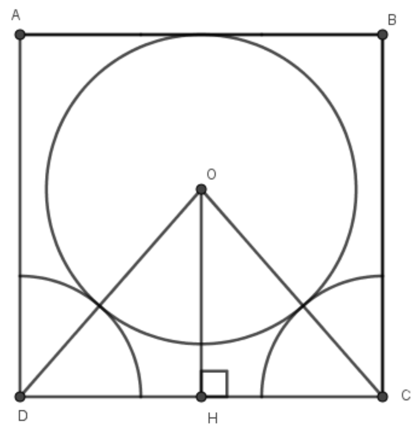
$$x^8 - 4x^6 + 4x^4 = 4+5+4\sqrt{5}-4\left(1+\sqrt{5}\right)$$

$$x^8 - 4x^6 + 4x^4 = 4+5+4\sqrt{5}-4-4\sqrt{5}$$

$$x^8 - 4x^6 + 4x^4 = 5$$

$$\boxed{E = 5}$$

Exercice 2



Considérons le triangle isocèle DOC .

Soit (OH) la hauteur de ce triangle.

Dans le triangle rectangle OHD , d'après la relation de Pythagore :

$$OD^2 = DH^2 + OH^2$$

$$(a+r)^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + (r+3a-2r)^2$$

$$a^2 + 2ar + r^2 = \frac{9a^2}{4} + (3a-r)^2$$

$$a^2 + 2ar + r^2 = \frac{9a^2}{4} + 9a^2 - 6ar + r^2$$

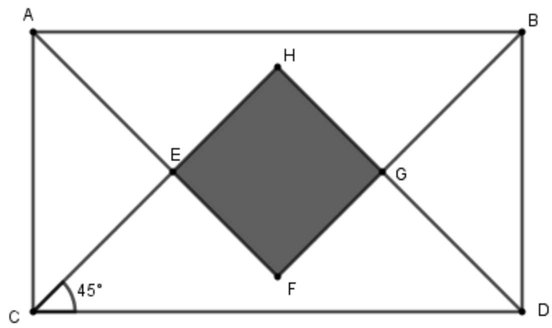
$$2ar + 6ar = \frac{9a^2}{4} + 8a^2$$

$$8ar = \frac{9a^2 + 32a^2}{4}$$

$$8ar = \frac{41a^2}{4}$$

$$\boxed{r = \frac{41}{32}a}$$

Exercice 3



Montrons que : $FH = MA + MB$

- Dans le triangle rectangle CHD

$$\sin 45^0 = \frac{HD}{CD}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{HD}{a}$$

$$HD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

- Dans le triangle rectangle BDG

$$\cos 45^0 = \frac{DG}{DB}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{DG}{b}$$

$$DG = \frac{\sqrt{2}}{2}b$$

- D’autre part : $HG = HD - DG$

$$HG = \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2}b$$

$$HG = \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$$

- Or l’aire du carré grisée est :

$$A = HG^2$$

$$A = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)\right]^2$$

$$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (a-b)^2$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(a-b)^2}$$

Exercice 1

- On a : $\underbrace{x^2 + 2x}$ est le début d'une identité remarquable.

En effet : $(x+1)^2 = \underbrace{x^2 + 2x} + 1$

Donc : $\underbrace{x^2 + 2x} = (x+1)^2 - 1$

Par conséquent : $A = \underbrace{x^2 + 2x} - 3$

$$A = (x+1)^2 - 1 - 3$$
$$A = (x+1)^2 - 2^2$$
$$A = [(x+1) - 2][(x+1) + 2]$$
$$A = (x-1)(x+3)$$

- On a : $\underbrace{x^2 + 4x}$ est le début d'une identité remarquable.

En effet : $(x+2)^2 = \underbrace{x^2 + 4x} + 4$

Donc : $\underbrace{x^2 + 4x} = (x+2)^2 - 4$

Par conséquent : $B = \underbrace{x^2 + 4x} - 5$

$$B = (x+2)^2 - 4 - 5$$
$$B = (x+2)^2 - 3^2$$
$$B = [(x+2) - 3][(x+2) + 3]$$
$$B = (x-1)(x+5)$$

- $$C = 2x^2 - 6x + 2$$
$$C = 2\left(x^2 - 3x + 1\right)$$

On a : $\underbrace{x^2 - 3x}$ est le début d'une identité remarquable.

En effet : $$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \underbrace{x^2 - 3x} + \frac{9}{4}$$

Donc : $$\underbrace{x^2 - 3x} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Par conséquent : $$C = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1\right]$$

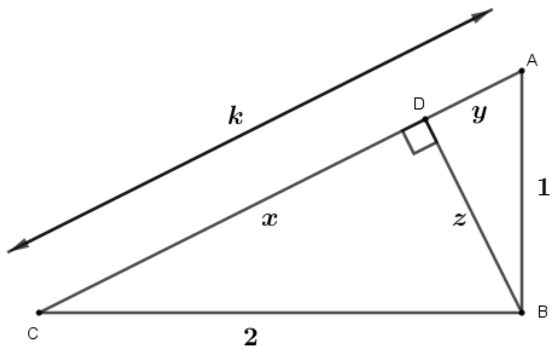
$$C = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right]$$

$$C = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]$$

$$C = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right]\left[\left(x - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

$$C = 2\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Exercice 2



- Dans le triangle rectangle ABC
D'après la relation de Pythagore.

$$AC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$k^2 = 1^2 + 2^2$$

$$k^2 = 5$$

Donc : $$k = \sqrt{5}$$

- Dans le triangle rectangle ABC .

$$\cos A\hat{C}B = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad (1)$$

Dans le triangle rectangle BCD

$$\cos A\hat{C}B = \frac{CD}{BC} = \frac{x}{2} \qquad (2)$$

$$de \quad (1) \quad et \quad (2) \quad on\,en\,déduit \quad : \quad \frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Donc : $x = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

- Dans le triangle rectangle ABC .

$$\cos C\hat{A}B = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad (3)$$

Dans le triangle rectangle ABD .

$$\cos C\hat{A}B = \frac{AD}{AB} = \frac{y}{1} = y \qquad (4)$$

$$de \quad (3) \quad et \quad (4) \quad on\,en\,déduit \quad : \quad y = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

- Dans le triangle rectangle BCD .

$$CD^2 + DB^2 = BC^2$$

$$\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 + z^2 = 2^2$$

$$z^2 = 2^2 - \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2$$

$$z^2 = 4 - \frac{80}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

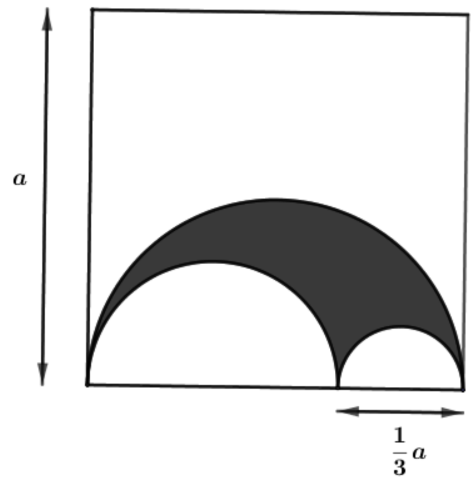
Donc : $z = \sqrt{\dfrac{4}{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Exercice 3

Soit A_1 l'aire du demi-cercle de diamètre $\frac{1}{3}a$.

Soit A_2 l'aire du demi-cercle de diamètre $\frac{2}{3}a$.

Soit A_3 l'aire du demi-cercle de diamètre a.



L'aire de la surface grisée est donc :

$$A = A_3 - (A_1 + A_2)$$

$$A = \frac{\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \pi}{2} - \left(\frac{\frac{1}{6}a \times \frac{1}{6}a \times \pi}{2} + \frac{\frac{2}{6}a \times \frac{2}{6}a \times \pi}{2} \right)$$

$$A = \frac{a^2 \times \pi}{8} - \left(\frac{a^2 \times \pi}{72} + \frac{4a^2 \times \pi}{72} \right)$$

$$A = \frac{9a^2 \times \pi}{72} - \frac{5a^2 \times \pi}{72}$$

$$A = \frac{4a^2 \times \pi}{72}$$

$$A = \frac{a^2 \times \pi}{18}$$

Exercice 1

Calculons le carré de chaque terme.

- $$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^2 = a+\sqrt{b}$$
- $$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2 = \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} + 2\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\right)}$$

$$= a+2\sqrt{\frac{a^2-\left(\sqrt{a^2-b}\right)^2}{4}}$$

$$= a+2\sqrt{\frac{a^2-a^2+b}{4}}$$

$$= a+2\frac{\sqrt{b}}{2}$$

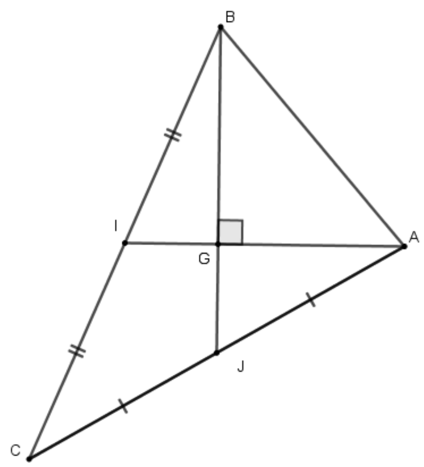
$$= a+\sqrt{b}$$

Donc : $$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Exercice 2

On a : $CA = 2JA$ et $CB = 2IB$

Et d'après le théorème de la droite des milieux. $IJ = \dfrac{AB}{2}$



Alors : $CA^2 + CB^2 = (2JA)^2 + (2IB)^2$

$CA^2 + CB^2 = 4\left(JA^2 + IB^2\right)$

Dans le triangle rectangle JAG , d'après le théorème de Pythagore :

$JA^2 = JG^2 + GA^2$

Dans le triangle rectangle IGB , d'après le théorème de Pythagore :

$IB^2 = IG^2 + GB^2$

Donc : $CA^2 + CB^2 = 4\left(JG^2 + GA^2 + IG^2 + GB^2\right)$

$$CA^2 + CB^2 = 4\left(\underbrace{JG^2 + IG^2}_{IJ^2} + \underbrace{GA^2 + GB^2}_{AB^2}\right)$$

$$CA^2 + CB^2 = 4\left(IJ^2 + AB^2\right)$$

$$CA^2 + CB^2 = 4\left(\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + AB^2\right)$$

$$CA^2 + CB^2 = 4\left(\frac{5AB^2}{4}\right)$$

$$\boxed{CA^2 + CB^2 = 5AB^2}$$

Exercice 3

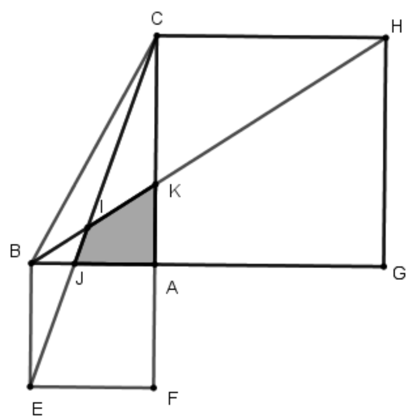
1.

- Dans le triangle rectangle BHG, d'après le théorème de Thales.

$$\frac{BA}{BG} = \frac{BK}{BH} = \frac{AK}{GH}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{AK}{b} \qquad (GH = AG = b)$$

Donc : $\boxed{AK = \dfrac{ab}{a+b}}$



- Soit A_{ABK} l'aire du triangle ABK.

$$A_{ABK} = \frac{AB \times AK}{2} = \frac{a}{2} \times \frac{ab}{a+b} = \frac{a^2 b}{2(a+b)}$$

2. Dans le triangle rectangle ECF, d'après le théorème de Thales.

$$\frac{CA}{CF} = \frac{CJ}{CE} = \frac{JA}{EF}$$

$$\frac{b}{a+b} = \frac{JA}{a}$$

$$JA = \frac{ab}{a+b}$$

$$A_{JAC} = \frac{JA \times AC}{2} = \frac{a^2 b}{2(a+b)}$$

$$A_{BJC} = A_{ABC} - A_{JAC}$$

$$A_{BJC} = \frac{ab}{2} - \frac{a^2 b}{2(a+b)}$$

$$A_{BJC} = \frac{ab(a+b) - a^2 b}{2(a+b)}$$

$$A_{BJC} = \frac{a^2 b}{2(a+b)}$$

Donc : $A_{BJC} = A_{ABK}$

Et par conséquent : $A_{IBC} = A_{BJC} - A_{JBI}$

$$A_{IBC} = A_{ABK} - A_{JBI}$$

$$\boxed{A_{IBC} = A_{AJIK}}$$

Exercice 1

1. $a=\dfrac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}+\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}+2$

$b=3\left(5-2\sqrt{5}\right)-\left(3\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}-2\right)$
$b=15-6\sqrt{5}-\left(15-6\sqrt{5}-\sqrt{5}+2\right)$
$b=15-6\sqrt{5}-15+6\sqrt{5}+\sqrt{5}-2$
$b=\sqrt{5}-2$

$c=\sqrt{20}+\sqrt{4}-\sqrt{45}$
$c=\sqrt{4}\times\sqrt{5}+2-\sqrt{9}\times\sqrt{5}$
$c=2\sqrt{5}+2-3\sqrt{5}$
$c=2-\sqrt{5}$

2. On a : $a\times b=\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)$
$=\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2=1$

Donc a est l'inverse de b .

3. $1-\dfrac{a}{b}=1-\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}=1-\dfrac{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}$
$=1-\left(5+4\sqrt{5}+4\right)=-8-4\sqrt{5}$

$\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}}=\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}}$
$=\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}=\sqrt{5}-2$

$\dfrac{2}{a}-\dfrac{\sqrt{5}}{b}=\dfrac{2}{\sqrt{5}+2}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{2\left(\sqrt{5}-2\right)-\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}$
$=2\sqrt{5}-4-5-2\sqrt{5}=-9$

4. $2a^2+b^2+c^2=2\left(\sqrt{5}+2\right)^2+\left(\sqrt{5}-2\right)^2+\left(2-\sqrt{5}\right)^2$
$=2\left(5+4\sqrt{5}+4\right)+\left(5-4\sqrt{5}+4\right)+\left(4-4\sqrt{5}+5\right)$
$=18+8\sqrt{5}+9-4\sqrt{5}+9-4\sqrt{5}$
$=36$

Exercice 2

1.

Le quadrilatère $AC'IB'$ a trois angles droits et deux côtés successifs IB' et IC' égaux.

C'est donc un carré.

On a : $2r = AB' + AC'$

$$2r = (AC - CB') + (AB - BC')$$

$$2r = (AC + AB) - (CB' + BC')$$

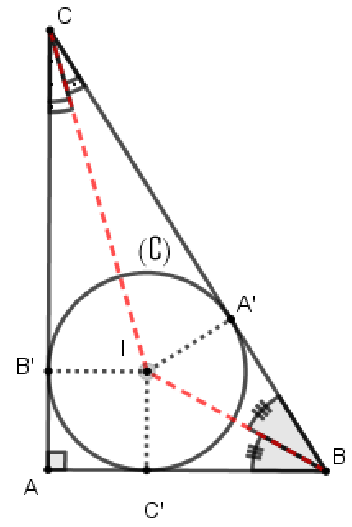
$$2r = b + c - (CB' + BC')$$

Or : $CB' = CA'$ et $BC' = BA'$

Et : $BA' + CA' = BC = a$

D'où : $2r = b + c - a$

$$\boxed{r = \frac{1}{2}(b + c - a)}$$



2.

On applique la formule précédente aux trois triangles PQH , PQR et PRH .

$$2r_1 = PH + QH - PQ$$

$$2r_2 = PR + PQ - QR$$

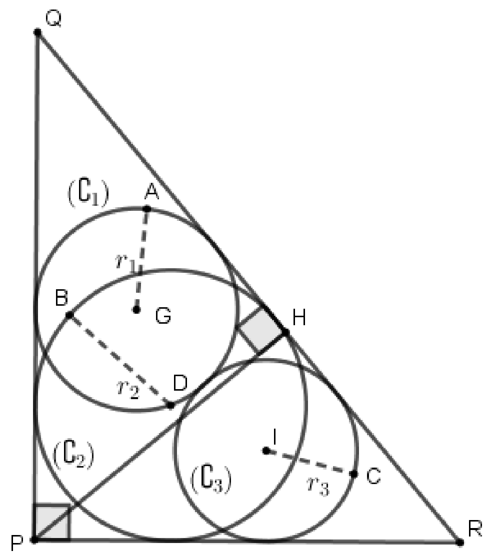
$$2r_3 = RH + PH - PR$$

D'où : $2(r_1 + r_2 + r_3) = 2PH + QH + RH - QR$

Or : $QH + RH = QR$

Donc : $2(r_1 +_2 + r_3) = 2PH$

$$\boxed{r_1 + r_2 + r_3 = PH}$$



Exercice 1

1.

$$\frac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}\times\sqrt{a}+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)}{1+\sqrt{a}} = \sqrt{a}$$

$$\sqrt{\frac{a^2b+ab^2}{a+b}} = \sqrt{\frac{ab\left(b+a\right)}{a+b}} = \sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}} = \frac{\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)}{\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)^2}{\left(\sqrt{a+b}\right)^2-\left(\sqrt{a-b}\right)^2} = \frac{(a+b)+2\sqrt{a+b}\times\sqrt{a-b}+(a-b)}{(a+b)-(a-b)}$$

$$= \frac{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}{2b} = \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

2.

On a : $a \geq b$

Donc : $b^2 \leq a^2$ et $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$

On en déduit : $b^2 + ab \leq a^2 + ab$

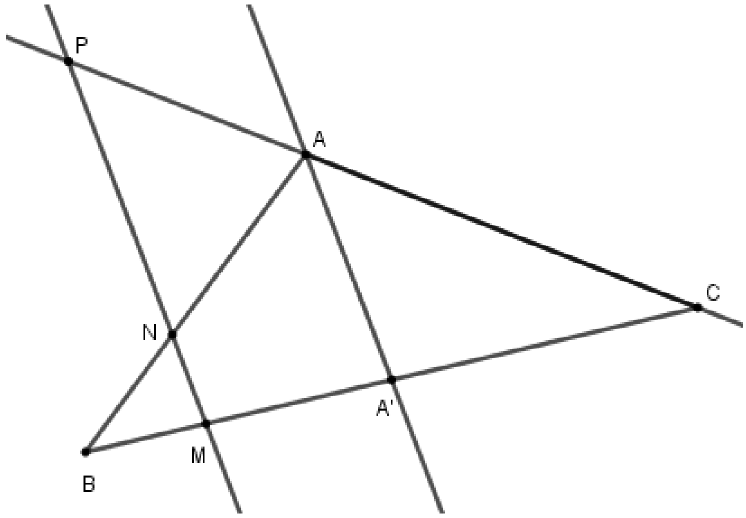
Et : $\sqrt{b^2+ab} \leq \sqrt{a^2+ab}$

Par suite : $\frac{1}{a}\times\sqrt{b^2+ab} \leq \frac{1}{b}\times\sqrt{a^2+ab}$

$$\frac{\sqrt{b^2+ab}}{a} \leq \frac{\sqrt{a^2+ab}}{b}$$

Exercice 2

a. Figure



b. Dans le triangle BAA' nous avons d'après le théorème de Thales.

$$\frac{BM}{BA'} = \frac{BN}{BA} = \frac{MN}{AA'} \qquad (1)$$

Dans le triangle CPM nous avons d'après le théorème de Thales.

$$\frac{CM}{CA'} = \frac{CP}{CA} = \frac{MP}{AA'} \qquad (2)$$

De (1) et (2) on en déduit : $\frac{MN}{AA'} + \frac{MP}{AA'} = \frac{BM}{BA'} + \frac{CM}{CA'}$

$(BA' = CA')$ $\qquad \frac{MN + MP}{AA'} = \frac{BM + CM}{BA'}$

$$\frac{MN + MP}{AA'} = \frac{BC}{BA'} = \frac{2BA'}{BA'} = 2$$

D'où : $\boxed{MN + MP = 2 \times AA'}$

Exercice 3

Soit $[MN]$ le diamètre du cercle (C) perpendiculaire à $[AD]$ et qui le coupe en P .

La droite (MN) est donc la médiatrice de $[AD]$.

Le point P est donc le milieu de $[AD]$.

On a : $AP = 4\,cm$ et $ON = r\,cm$

$$PO = PN - ON$$

$$PO = 8 - r$$

Dans le triangle APO rectangle en P , nous avons d'après le théorème de Pythagore.

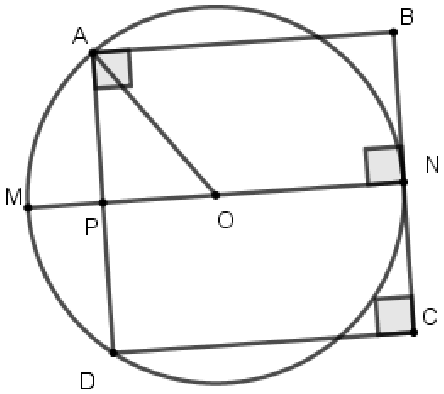
$$OA^2 = OP^2 + AP^2$$

$$r^2 = (8-r)^2 + 4^2$$

$$r^2 = 64 - 16r + r^2 + 16$$

$$16r = 80$$

$$\boxed{r = \frac{80}{16} = 5\,cm}$$



Exercice 1

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}\cos^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha.\sin\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha\right) + \left(\frac{1}{4}\sin^2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha.\sin\alpha + \frac{3}{4}\cos^2\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + \frac{3}{4}\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= 1$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = 1}$$

Exercice 2

On a : $h = AB = AK + KB$

$h = 2r + KB$

D'autre part : les deux segments $[IK]$ et $[JC]$ sont égaux et parallèles.

Donc le quadrilatère $IJCK$ est un parallélogramme.

Par conséquent : $KC = IJ$

Dans le triangle rectangle KBC , on a d'après le théorème de Pythagore.

$KB^2 + BC^2 = KC^2$

$KB^2 = KC^2 - BC^2$

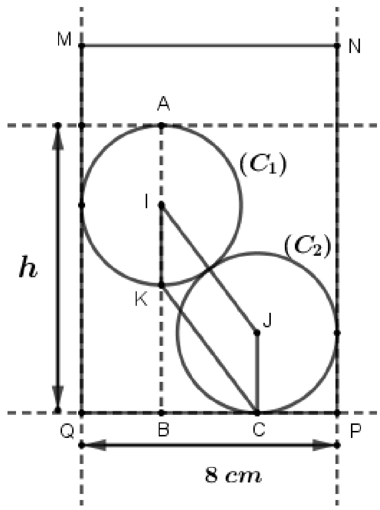
$KB^2 = IJ^2 - BC^2$

$KB^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

Donc : $KB = 4$

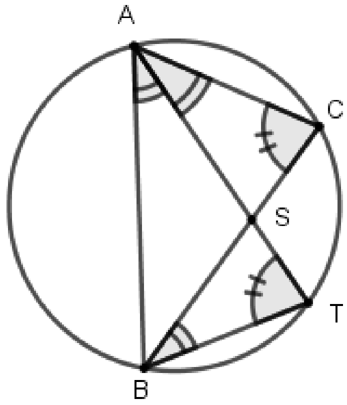
Par suite : $h = 5 + 4$

$$\boxed{h = 9\,cm}$$



Exercice 3

1. Comparaison des deux triangles ABT et ASC.



- Nous avons $[AT)$ la bissectrice de l'angle $\left[B\hat{A}C\right]$.

  Donc : $B\hat{A}T = S\hat{A}C$ (1)

- $\left[A\hat{T}B\right]$ et $\left[A\hat{C}S\right]$ sont deux angles inscrits dans le cercle (C)

  Qui interceptent le même arc de cercle.

  Donc : $A\hat{T}B = A\hat{C}S$ (2)

  De (1) et (2) on en déduit que les triangles ABT et ASC sont semblables.

2. Déduire que : $AB \times AC = AS \times AT$

Puisque les triangles ABT et ASC sont semblables, alors, leurs côtés sont respectivement proportionnels.

$$\frac{BT}{SC} = \frac{AT}{AC} = \frac{AB}{AS}$$

$$\frac{AT}{AC} = \frac{AB}{AS}$$

Donc : $\boxed{AB \times AC = AS \times AT}$

3. Comparaison des deux triangles ABT et BTS.

- On a : $A\hat{T}B = S\hat{T}B$ (3) $(angle\ commun)$
- $\left[C\hat{A}T\right]$ et $\left[S\hat{B}T\right]$ sont deux angles inscrits dans le cercle (C)

  Qui interceptent le même arc de cercle.

  Donc : $C\hat{A}T = S\hat{B}T$ (4)
- Et on a : $C\hat{A}T = B\hat{A}T$ (1)

  Donc : $S\hat{B}T = B\hat{A}T$ (5)

  De (3) et (5) on en déduit que les triangles ABT et BTS sont semblables.

4. Déduire que : $BT^2 = AT \times ST$

   Puisque les triangles ABT et BTS sont semblables, alors, leurs côtés sont respectivement proportionnels.

$$\frac{AB}{BS} = \frac{AT}{BT} = \frac{BT}{ST}$$

$$BT \times BT = AT \times ST$$

$$\boxed{BT^2 = AT \times ST}$$

Exercice 1

- On a : $3 < \sqrt{4x+1} < 5$

  Donc :

$$3^2 < \left(\sqrt{4x+1}\right)^2 < 5^2$$
$$9 < 4x+1 < 25$$
$$8 < 4x < 24$$
$$\frac{8}{4} < \frac{4x}{4} < \frac{24}{4}$$
$$\boxed{2 < x < 6}$$

- On a : $2 < -y < 5$

  Et : $\frac{1}{25} < \frac{1}{4x+1} < \frac{1}{9}$

  Donc : $2\times\frac{1}{25} < -y\times\frac{1}{4x+1} < 5\times\frac{1}{9}$

$$\frac{2}{25} < \frac{-y}{4x+1} < \frac{5}{9}$$

  Par conséquent : $\sqrt{\frac{2}{25}} < \sqrt{\frac{-y}{4x+1}} < \sqrt{\frac{5}{9}}$

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{5} < \sqrt{\frac{-y}{4x+1}} < \frac{\sqrt{5}}{3}}$$

Exercice 2

1. On calcule la différence.

$$A - B = ab+1 - (a+1)(b+1)$$
$$A - B = ab+1 - (ab+a+b+1)$$
$$A - B = ab+1 - ab-a-b-1$$
$$A - B = -a-b$$
$$A - B = -(a+b)$$

a et b étant positifs, le nombre $-(a+b)$ est négatif.

Donc : $\boxed{A < B}$

2. On calcule la différence.

$$C - D = \frac{a}{b}+\frac{b}{a} - 2$$

$$C - D = \frac{a^2+b^2-2ab}{ab}$$

$$C - D = \frac{(a-b)^2}{ab}$$

a et b étant positifs, les nombres ab et $(a-b)^2$ le sont aussi.

Donc $\frac{(a-b)^2}{ab}$ est positif.

Par conséquent : $\boxed{C > D}$

Exercice 3

Le triangle MEH étant rectangle en H , d'après le théorème de Pythagore.

$$EH^2 + MH^2 = ME^2$$

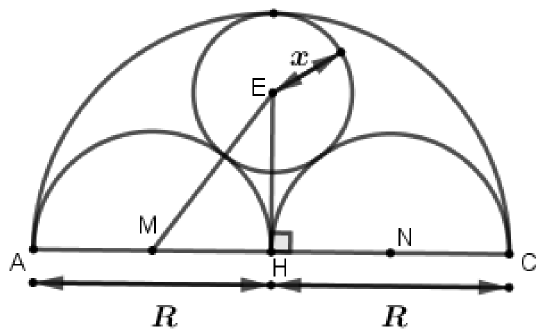
$$(R-x)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{2}+x\right)^2$$

$$R^2-2xR+x^2 + \frac{R^2}{4} = \frac{R^2}{4}+Rx+x^2$$

$$R^2-2xR + = Rx$$

$$R^2 = 3Rx$$

$$\boxed{x = \frac{R}{3}}$$



Olympiades de mathématiques

Académie Rabat-Kenitra
25 / 04 / 2014

Exercice 1

$$\frac{371}{13^2} = x + \frac{y}{13} + \frac{z}{13^2}$$

On a : $371 = (13\times 28) + 7$

Et : $28 = (13\times 2) + 2$

Donc : $371 = 13\times\left[(13\times 2)+2\right] + 7$

$$371 = 13\times(13\times 2) + 13\times 2 + 7$$

$$\frac{371}{13^2} = \frac{13^2\times 2}{13^2} + \frac{13\times 2}{13^2} + \frac{7}{13^2}$$

$$\frac{371}{13^2} = 2 + \frac{2}{13} + \frac{7}{13^2}$$

Par conséquent : $\boxed{x = 2 \; ; \; y = 2 \;\; et \;\; z = 7}$

Exercice 2

1. On a : $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a}\times\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

Donc : $\boxed{a + b \geq 2\sqrt{ab}}$

2. On a d'après ce qui précède :

$$1 + x \geq 2\sqrt{x}$$

Donc : $(1 + x)^{2004} \geq \left(2\sqrt{x}\right)^{2004}$

$$(1 + x)^{2004} \geq 2^{2004} \times \left(\sqrt{x}\right)^{2004}$$

$$\frac{(1 + x)^{2004}}{2^{2004}} \geq \frac{2^{2004} \times \left(\sqrt{x}\right)^{2004}}{2^{2004}}$$

$$\frac{(1 + x)^{2004}}{2^{2004}} \geq \left(\sqrt{x}\right)^{2004}$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^{2004}} \geq \frac{2^{2004}}{(1 + x)^{2004}} \qquad (1)$$

On a aussi d'après le résultat de la première question :

$$1 + x^{2006} \geq 2\sqrt{x^{2006}}$$

$$1 + x^{2006} \geq 2\sqrt{x^{2}} \times \sqrt{x^{2004}}$$

$$1 + x^{2006} \geq 2x \times \left(\sqrt{x}\right)^{2004} \qquad (2)$$

En appliquant la propriété de l'ordre et le produit entre les inégalités (1) et (2).

$$\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^{2004}} \times \left(1 + x^{2006}\right) \geq \frac{2^{2004}}{(1 + x)^{2004}} \times 2x \times \left(\sqrt{x}\right)^{2004}$$

En multipliant les deux membres par le nombre positif $\left(\sqrt{x}\right)^{2004}$. Alors :

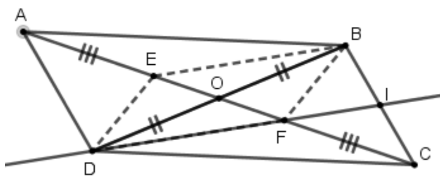
$$\left(\sqrt{x}\right)^{2004} \times \frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^{2004}} \times \left(1 + x^{2006}\right) \geq \frac{2^{2004}}{(1 + x)^{2004}} \times 2x \times \left(\sqrt{x}\right)^{2004} \times \left(\sqrt{x}\right)^{2004}$$

$$\left(1 + x^{2006}\right) \geq \frac{2^{2004}}{(1 + x)^{2004}} \times 2x \times (x)^{2004}$$

$$\left(1 + x^{2006}\right) \geq \frac{2^{2005}}{(1 + x)^{2004}} \times x^{2005}$$

Et enfin : $\boxed{1 + x^{2006} \geq \frac{(2x)^{2005}}{(1+x)^{2004}}}$

Exercice 3



Soit O le centre du parallélogramme $ABCD$.

Le point O est le milieu des segments $[AC]$ et $[DB]$.

Or $FC = FE = EA$

Donc Le point O est le milieu des segments $[EF]$.

On en déduit que le quadrilatère $EBFD$ est un parallélogramme.

D'où : $(EB) \,//\, (DF)$

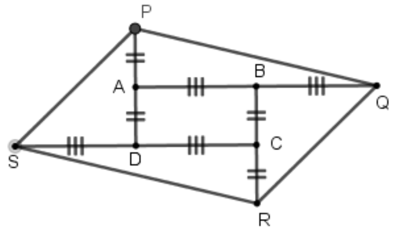
Dans le triangle CBE , d'après le théorème de Thales.

$$\frac{CF}{CE} = \frac{CI}{CB} = \frac{1}{2} \qquad (CE = 2CF)$$

$$CI = \frac{1}{2}CB \text{ et } I \in [BC]$$

Donc le point I est le milieu de $[BC]$.

Exercice 4



1. $ABCD$ est un rectangle, donc il possède quatre angles droits.
   D'où, et avec le codage :

   - Les triangles rectangles PDS et RBQ sont isométriques.
     Donc : $PS = RQ \quad (1)$

   - Les triangles rectangles PAQ et SCR sont isométriques.
     Donc : $PQ = SR \quad (2)$
     Le quadrilatère $PQRS$ a respectivement ses côtés opposés égaux, c'est donc Un parallélogramme.

2. Calcul de l'aire de $PQRS$.

   Soit : $a = AB \quad et \quad b = BC \qquad \left(A_{ABCD} = ab = 3\,cm^2\right)$

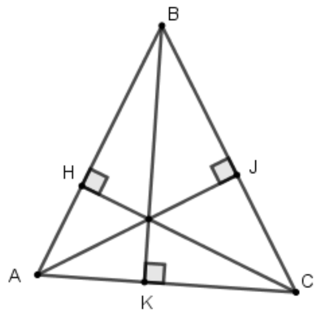
$$A_{PQRS} = A_{ABCD} + A_{PAQ} + A_{SCR} + A_{PDS} + A_{RBQ}$$

$$A_{PQRS} = ab + \frac{2ab}{2} + \frac{2ab}{2} + \frac{2ba}{2} + \frac{2ba}{2}$$

$$A_{PQRS} = 5ab$$

$$\boxed{A_{PQRS} = 15\,cm^2}$$

Exercice 5



1. L'aire du triangle ABC peut être calculé par les formules :

$$A_{ABC} = \frac{AJ \times BC}{2} = \frac{CH \times AB}{2} \quad \frac{BK \times AC}{2}$$

D'où : $AJ \times BC = CH \times AB = BK \times AC$

$$15AJ = 14CH \quad 13BK$$

On en déduit que : $AJ < CH < BK$

Dans le triangle rectangle CHA , on a : $AC^2 = CH^2 + AH^2$

$$CH^2 = 13^2 - AH^2 \qquad (1)$$

Dans le triangle rectangle CHB , on a : $BC^2 = CH^2 + BH^2$

$$CH^2 = 15^2 - BH^2 \qquad (2)$$

De (1) et (2) on en déduit : $13^2 - AH^2 = 15^2 - BH^2$

$$BH^2 - AH^2 = 15^2 - 13^2$$

$$(BH + AH)(BH - AH) = 56$$

Or : $BH + AH = AB = 14$

Donc : $BH - AH = \frac{56}{14} = 4$

D'ou : $BH = 9 \quad et \quad AH = 5$

Par conséquent : $CH^2 = 15^2 - 5^2 = 144$

Et donc : $CH = \sqrt{144} = 12cm$

La longueur CH est un entier.

2. Dans le triangle rectangle AJC, on a : $AC^2 = AJ^2 + CJ^2$

$$AJ^2 = 13^2 - CJ^2 \qquad (3)$$

Dans le triangle rectangle AJB, on a : $AB^2 = AJ^2 + BJ^2$

$$AJ^2 = 14^2 - BJ^2 \qquad (4)$$

De (3) et (4) on en déduit : $14^2 - BJ^2 = 13^2 - CJ^2$

$$14^2 - 13^2 = BJ^2 - CJ^2$$

$$(BJ + CJ)(BJ - CJ) = 27$$

Or : $BJ + CJ = BC = 15$

Donc : $BJ - CJ = \frac{27}{15} = 1{,}8$

D'où : $BJ = 8{,}4 \quad et \quad CJ = 6{,}6$

Par conséquent : $AJ^2 = 13^2 - 6{,}6^2 = 125{,}44$

Et donc : $AJ = \sqrt{125{,}44} = 11{,}2cm$

Donc la longueur AJ est un **décimal**.

3. D'après ce qui précède : $15AJ = 14CH \quad 13BK$

$$BK = \frac{14 \times CH}{13} = \frac{14 \times 12}{13} = \frac{168}{13}$$

Donc la longueur BK est une fraction.

Exercice 1

1. Calcul de a^2 et b^2

$$a^2 = \left(1-\sqrt{3}\right)^2 = 1-2\sqrt{3}+3 = 4-2\sqrt{3}$$

$$b^2 = \left(6\times\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = 36\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 36\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = 18\left(2-\sqrt{3}\right)$$

2. Montrons que : $b = -3a$

On peut écrire : $b^2 = 18\left(2-\sqrt{3}\right) = 9\left(4-2\sqrt{3}\right)$

$b^2 = 9a^2$

Or : $1-\sqrt{3} < 0$ c'est-à-dire $a < 0$

Et comme b est positif, alors : $b = -3a$

3. $$E = \frac{2-\sqrt{12}}{6\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{2-2\sqrt{3}}{-3\left(1-\sqrt{3}\right)} = \frac{2\left(1-\sqrt{3}\right)}{-3\left(1-\sqrt{3}\right)} = \frac{-2}{3}$$

E est donc un nombre rationnel.

Exercice 2

On a : $$\frac{a^2-b^2}{ab} + \frac{b^2-ab}{ab-a^2} = \frac{\left(a^2-b^2\right)\left(ab-a^2\right)+ab\left(b^2-ab\right)}{ab\times\left(ab-a^2\right)}$$

$$= \frac{\left(a^2-b^2\right)\times a\left(b-a\right)+ab\times b\left(b-a\right)}{ab\times a\left(b-a\right)}$$

$$= \frac{\left(a^2-b^2\right)}{ab} + \frac{b}{a}$$

$$= \frac{a}{b} - \frac{b}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

Donc : $$\frac{a^2-b^2}{ab} + \frac{b^2-ab}{ab-a^2} = \frac{a}{b}$$

Exercice 3

1. On a : $a + \frac{1}{a} = \sqrt{5}$

Donc : $$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$$

$$a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} = 5$$

On en déduit : $\boxed{a^2 + \frac{1}{a^2} = 3}$

2. On a :

- $\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 \times \left(a + \frac{1}{a}\right) = 5\sqrt{5}$

$$\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) = 5\sqrt{5}$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} + \left(a + \frac{1}{a}\right) + 2\left(a + \frac{1}{a}\right) = 5\sqrt{5}$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$$

$$\boxed{a^3 + \frac{1}{a^3} = 2\sqrt{5}}$$

- $\left(a + \frac{1}{a}\right)^4 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 25$

$$\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\right) = 25$$

$$a^4 + 1 + 2a^2 + 1 + \frac{1}{a^4} + \frac{2}{a^2} + 2a^2 + \frac{2}{a^2} + 4 = 25$$

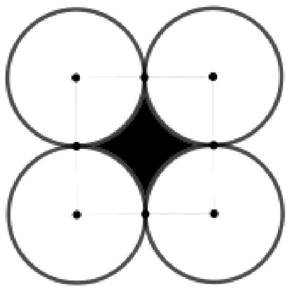
$$a^4 + \frac{1}{a^4} + 4\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + 6 = 25$$

$$a^4 + \frac{1}{a^4} + 4 \times 3 + 6 = 25$$

$$a^4 + \frac{1}{a^4} = 25 - 6 - 12$$

$$\boxed{a^4 + \frac{1}{a^4} = 7}$$

Exercice 4



L'aire de la partie grisée est la différence entre l'aire du carrée dont les Sommets sont les centres des cercles et quatre fois l'aire du secteur Angulaire d'un cercle.

$$A = (2r)^2 - 4 \times \frac{r^2 \times \pi}{4}$$

$$A = 4r^2 - r^2 \times \pi$$

$$\boxed{A = r^2 (4 - \pi)}$$

Exercice 5

Le point N appartient au cercle (C_1) dont le diamètre est $[AB]$,

Donc l'angle $A\hat{N}B$ est rectangle.

Par suite : $(AN) \perp (NB)$

Le point M appartient au cercle (C_2) dont le diamètre est $[AO]$,

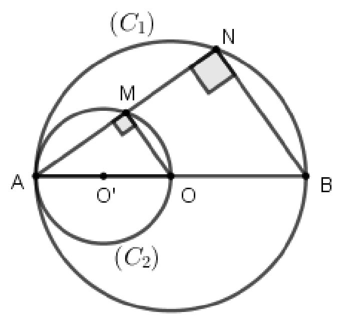
Donc l'angle $A\hat{M}O$ est rectangle.

Par suite : $(AM) \perp (MO)$

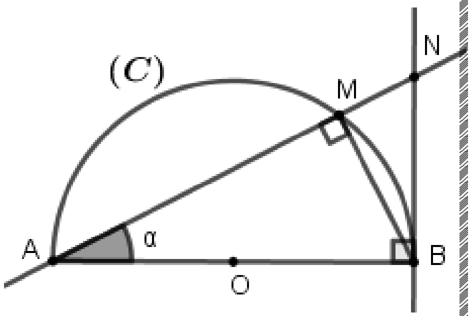
Puisque les points A , M et N sont alignés, on en déduit que : $(NB) \ // \ (MO)$

Dans le triangle ANB , d'après le théorème de Thales :

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AO}{AB} = \frac{MO}{NB}$$



Exercice 1



1. Calcul de AM et MB en fonction de R et de α .
   - On considère le triangle AMB rectangle en M .

   $\cos\alpha = \dfrac{AM}{AB}$ équivalent à $AM = AB.\cos\alpha$

   Donc : $AM = 2R.\cos\alpha$
   - On considère le triangle AMB rectangle en M .

   $\sin\alpha = \dfrac{MB}{AB}$ équivalent à $MB = AB.\sin\alpha$

   Donc : $MB = 2R.\sin\alpha$
2. Calcul de AN et NB en fonction de R et de α .
   - On considère le triangle ANB rectangle en B .

   $\cos\alpha = \dfrac{AB}{AN}$ équivalent à $AN = \dfrac{AB}{\cos\alpha}$

   Donc : $AN = \dfrac{2R}{\cos\alpha}$
   - On considère le triangle ANB rectangle en B .

   $\tan\alpha = \dfrac{NB}{AB}$ équivalent à $NB = AB.\tan\alpha$

   Donc : $NB = 2R.\tan\alpha$
3. Montrons que : $MN = 2R\sin\alpha.\tan\alpha$

$$MN = AN - AM = \frac{2R}{\cos\alpha} - 2R.\cos\alpha$$

$$MN = 2R\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right) = 2R\left(\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$MN = 2R\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right) = 2R.\sin\alpha.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$MN = 2R.\sin\alpha.\tan\alpha$$

4. Application : $\alpha = 30^0$ *et* $R = 10$

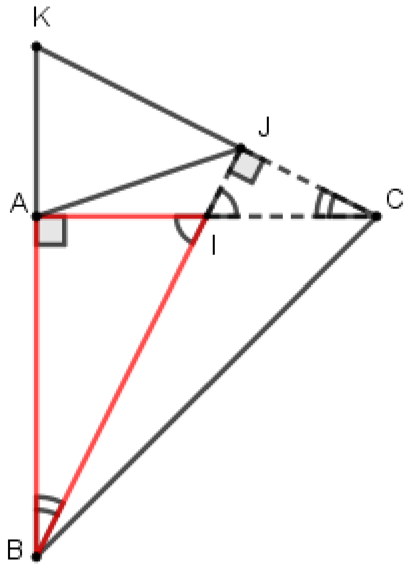
$$MB = 2R.\sin 30^0 = 2\times 10\times\frac{1}{2} = 10$$

$$AN = \frac{2R}{\cos 30^0} = \frac{2\times 10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$$

$$MN = 2R.\sin 30^0.\tan 30^0 = 2\times 10\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$MA = 2R.\cos 30^0 = 2\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

Exercice 2



1. La figure.

2. Comparaison des triangles ABI et ICJ.

Les angles $A\hat{I}B$ et $J\hat{I}C$ sont opposés par le sommet.
Donc : $A\hat{I}B = J\hat{I}C$
Les angles $B\hat{A}I$ et $C\hat{J}I$ sont rectangles.
Donc : $B\hat{A}I = C\hat{J}I$
On conclut que les deux triangles ABI et ICJ sont **semblables**.

3. Montrons que les triangles ABI et ACK sont isométriques.
Puisque les triangles ABI et ICJ sont semblables, alors $A\hat{B}I = J\hat{C}I$
On sait que : $B\hat{A}C = C\hat{A}K = 90^0$
Et puisque le triangle ABC est isocèle, alors $AB = AC$
On conclut que les deux triangles ABI et ACK sont **isométriques.**

4.
- Calcul de BC.

Dans le triangle rectangle ABC on a, d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 6^2 + 6^2 = 72$$

$$BC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

- Calcul de BI
Dans le triangle rectangle ABI on a, d'après le théorème de Pythagore :

$$BI^2 = AB^2 + AI^2$$
$$BI^2 = 6^2 + 3^2 = 45$$
$$BI = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

- Calcul de JC
Puisque les triangles ABI et ICJ sont **semblables.**

Alors : $\dfrac{AB}{JC} = \dfrac{AI}{IJ} = \dfrac{BI}{CI}$

$$\frac{AB}{JC} = \frac{BI}{CI} \quad \text{équivalent à}$$

$$JC = \frac{AB \times CI}{BI} = \frac{6 \times 3}{3\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

- Calcul de IJ

$$\frac{AI}{IJ} = \frac{BI}{CI} \quad \text{équivalent à}$$

$$IJ = \frac{AI \times CI}{BI} = \frac{3 \times 3}{3\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Exercice 3

On a : $DC = \frac{r}{2} + x \quad ; \quad OD = r - x \quad ; \quad DH = x$

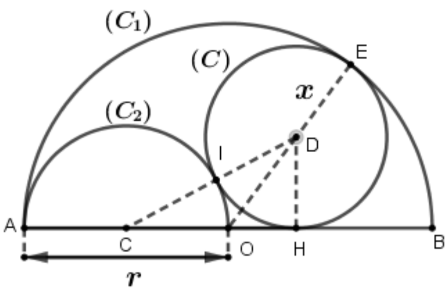
Les triangles DCH et DOH, tous deux rectangles en H, permettent d'écrire, d'après le théorème de Pythagore.

$$DC^2 = DH^2 + CH^2 \qquad (1)$$

$$\left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = x^2 + \left(\frac{r}{2} + OH\right)^2 \qquad (1)$$

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 + rx + x^2 = x^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 + r \times OH + OH^2 \qquad (1)$$

$$\boxed{rx = r \times OH + OH^2 \qquad (1)}$$



$$OD^2 = OH^2 + DH^2 \qquad (2)$$

$$(r - x)^2 = OH^2 + x^2 \qquad (2)$$

$$r^2 - 2rx + x^2 = OH^2 + x^2 \qquad (2)$$

$$\boxed{r^2 - 2rx = OH^2 \qquad (2)}$$

On remplace rx par $r \times OH + OH^2$ dans l'égalité (2)

Alors : $\quad r^2 - 2\left(r \times OH + OH^2\right) = OH^2$

$$r^2 - 2.r.OH - 2.OH^2 = OH^2$$

$$3.OH^2 + 2.r.OH - r^2 = 0$$

$$3.\left(\left(OH + \frac{r}{3}\right)^2 - \left(\frac{r}{3}\right)^2 - \frac{r^2}{3}\right) = 0$$

$$3.\left(\left(OH + \frac{r}{3}\right)^2 - \frac{r^2}{9} - \frac{r^2}{3}\right) = 0$$

$$3.\left(\left(OH + \frac{r}{3}\right)^2 - \left(\frac{2r}{3}\right)^2\right) = 0$$

$$3.\left(OH + \frac{r}{3} - \frac{2r}{3}\right)\left(OH + \frac{r}{3} + \frac{2r}{3}\right) = 0$$

$$3.\left(OH - \frac{r}{3}\right)(OH + r) = 0$$

On en déduit : $OH - \frac{r}{3} = 0 \quad ou \quad OH + r = 0$

$$OH = \frac{r}{3} \quad ou \quad OH = -r$$

Puisque les longueurs sont positives, la solution est donc $OH = \frac{r}{3}$

En remplaçant OH par $\frac{r}{3}$ dans l'égalité (2)

Alors : $r^2 - 2.r.x = \left(\frac{r}{3}\right)^2$

$$r^2 - 2.r.x - \frac{r^2}{9} = 0$$

$$2.r.x = \frac{8r^2}{9}$$

$$\boxed{x = \frac{4r}{9}}$$