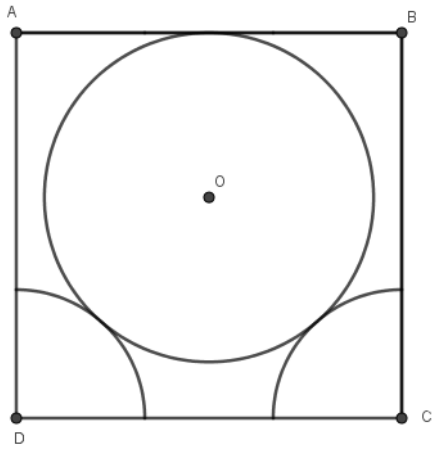
## Exercice 1

Sachant que : $a = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{5}}}$

Calculer le nombre : $E = a^8 - 4a^6 + 4a^4$

## Exercice 2




$ABCD$ est un carré de côté $3a$ .

Le cercle de centre $O$ et tangent au côté $[AB]$ a pour rayon $r$ .

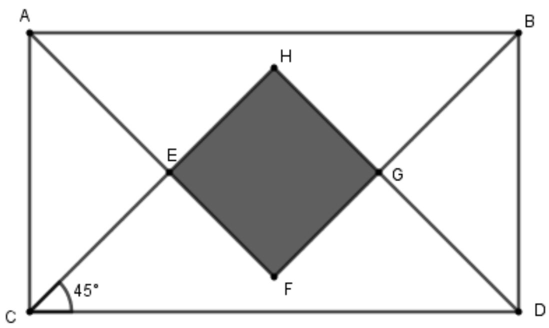
Les deux arcs de cercles ont pour rayon $a$ .

Calculer le rayon $r$ en fonction de $a$ .

## Exercice 3

Dans le rectangle $ABDC$ de longueur $a$ et de largeur $b$ dessiné ci-dessous

Calculer l'aire grisée du carré.



## Exercice 1

Factoriser : $A = x^2 + 2x - 3$

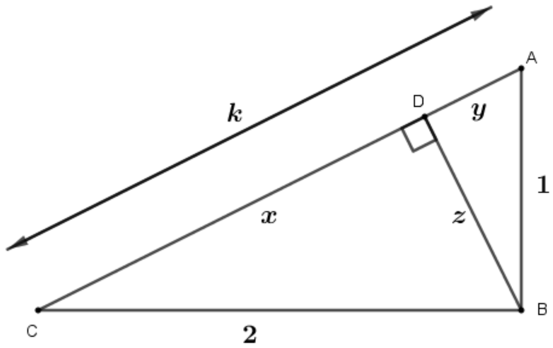
$B = x^2 + 4x - 5$

$C = 2x^2 - 6x + 2$

## Exercice 2

Voir la figure à côté.

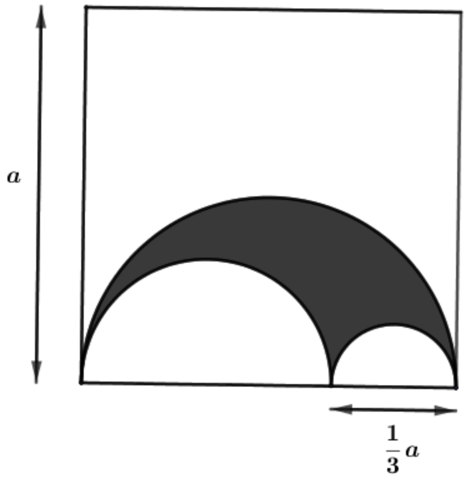
Calculer $x$ ; $y$ ; $z$ ; $k$




## Exercice 3

Dans un carré de côté $a$, on construit les trois demi-cercles comme le montre le dessin ci-dessous.

Calculer l'aire de la surface grisée en fonction de $a$.



| abdoucmcf | Défi N°3 | Classe de 3ème Année |
| --- | --- | --- |

## Exercice 1

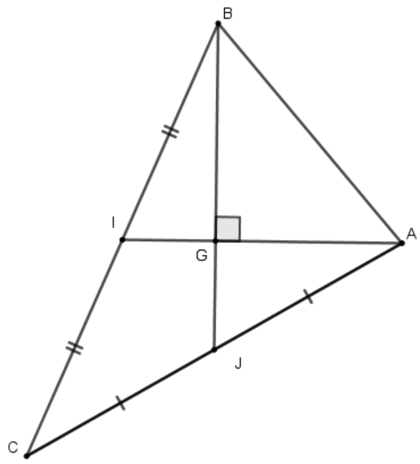
$a$ et $b$ deux nombres positifs.

Montrer que : $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

## Exercice 2

Dans la figure suivante, le triangle $ABC$ est tel que les médianes $(AI)$ et $(BJ)$ sont perpendiculaires.

Exprimer $CA^2 + CB^2$ en fonction de $AB^2$.




## Exercice 3

Sur la figure ci-contre, $ABC$ est un triangle rectangle en $A$.

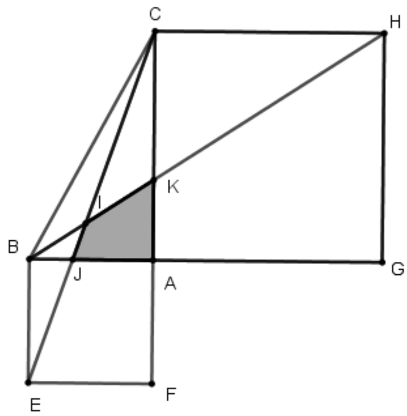
$ABEF$ et $AGHC$ sont des carrés.

On pose : $AB = a$ et $AG = b$.

$K$ est le point d'intersection des droites $(AC)$ et $(BH)$.

$J$ est le point d'intersection des droites $(AB)$ et $(EC)$.

$I$ est le point d'intersection des droites $(BH)$ et $(EC)$.




1. Exprimer $AK$ en fonction de $a$ et de $b$ puis en déduire L'aire du triangle $ABK$ en fonction de $a$ et de $b$.
2. Montrer que le triangle $IBC$ et le quadrilatère $AJIK$ Ont la même aire.

| abdoucmcf | Défi N°4 | Classe de 3ème Année |
| --- | --- | --- |

## Exercice 1

On pose : $a = \dfrac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ ; $b = 3\left(5-2\sqrt{5}\right)-\left(3\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}-2\right)$

$c = \sqrt{20}+\sqrt{4}-\sqrt{45}$

1. Simplifier $a$ , $b$ et $c$ .
2. Montrer que $a$ et l'inverse de $b$ .
3. Déduire le calcul des expressions : $1-\dfrac{a}{b}$ ; $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ ; $\dfrac{2}{a}-\dfrac{\sqrt{5}}{b}$
4. Déduire que : $2a^2 + b^2 + c^2 = 36$

## Exercice 2

On considère un triangle $ABC$ rectangle en $A$ .

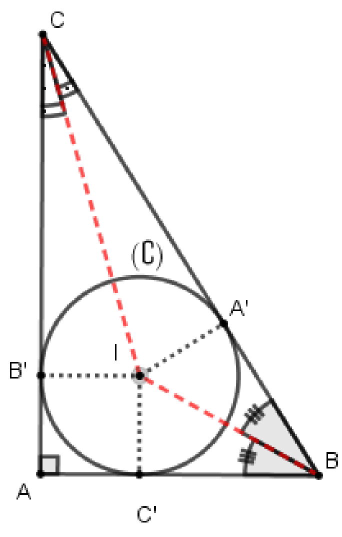
On note : $a = BC$ ; $b = AC$ ; $c = AB$ .

On appelle $(C)$ le cercle inscrit dans le triangle $ABC$ .

On rappelle que le centre du cercle inscrit d'un triangle est le point d'intersection des bissectrices.

On appelle $r$ le rayon de ce cercle.

1. Démontrer que : $r = \dfrac{1}{2}(b + c - a)$
2. $PQR$ est un triangle rectangle en $P$ .
   Soit $H$ le pied de la hauteur de $PQR$ issue de $P$ .
   On appelle $(C_1)$ , $(C_2)$ et $(C_3)$ les cercles inscrits dans les triangles $PQH$ , $PQR$ et $PRH$ .
   On appelle $r_1$ , $r_2$ et $r_3$ les rayons respectifs des cercles $(C_1)$ , $(C_2)$ et $(C_3)$.
   Démontrer que : $PH = r_1 + r_2 + r_3$



## Exercice 1

1. $a$ et $b$ sont deux nombres positifs différents.
   Simplifier les expressions :
   $\dfrac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$ ; $\sqrt{\dfrac{a^2b+ab^2}{a+b}}$ ; $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$

2. Si $a \geq b$ comparer les deux nombres $\dfrac{\sqrt{a^2+ab}}{a}$ et $\dfrac{\sqrt{b^2+ab}}{b}$

## Exercice 2

Soit $ABC$ un triangle.
Le point $A'$ est le milieu de $[BC]$ et $M$ est un point de $[BC]$.
La parallèle à la droite $(AA')$ passant par le point $M$ coupe $(AB)$ en $N$ et $(AC)$ en $P$.

a. Faire une figure.
b. Montrer que : $MN + MP = 2 \times AA'$

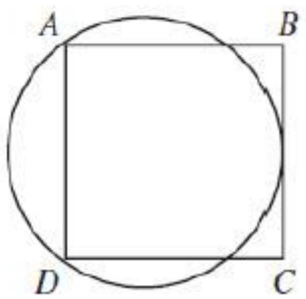
## Exercice 3

$ABCD$ est un carré de côté $8\,cm$.

$(C)$ est un cercle de centre $O$ et de rayon $r$ qui passe par les deux points $A$ et $D$.

Le cercle $(C)$ est tangent au côté $[BC]$ au point $N$.

Calculer le rayon r du cercle.



## Exercice 1

Soit $\alpha$ un angle aigu. $\left( 0^0 < \alpha < 90^0 \right)$

On donne : $a = \dfrac{1}{2}\cos\alpha - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$ et $b = \dfrac{1}{2}\sin\alpha + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$

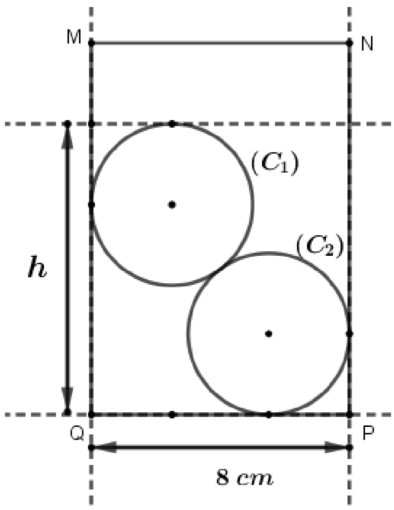
Calculer : $a^2 + b^2$

## Exercice 2

$MNPQ$ est un rectangle.

Les deux cercles $\left(C_1\right)$ et $\left(C_2\right)$ ont $5\,cm$ de diamètre.

Calculer la hauteur $h$ .

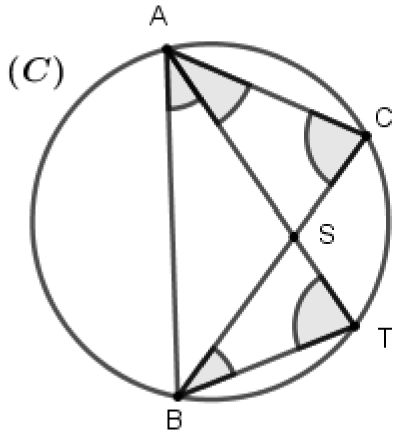



## Exercice 3

$ABC$ est un triangle et $(C)$ son cercle circonscrit.

$[AT)$ est la bissectrice de l'angle $\left[B\hat{A}C\right]$.Elle coupe le segment $[BC]$ en $S$ .

1. Comparer les deux triangles $ABT$ et $ASC$ .
2. Déduire que : $AB \times AC = AS \times AT$
3. Comparer les deux triangles $ABT$ et $BTS$ .
4. Déduire que : $BT^2 = AT \times ST$



## Exercice 1

$x$ est un réel positif tel que : $3 < \sqrt{4x+1} < 5$

$y$ est un réel tel que : $-5 < y < -2$

Encadrer $x$ et $\sqrt{\dfrac{-y}{4x+1}}$

## Exercice 2

$a$ et $b$ sont deux nombres strictement positifs.

1. On pose : $A = ab + 1$ et $B = (a+1)(b+1)$
   Comparer $A$ et $B$ .

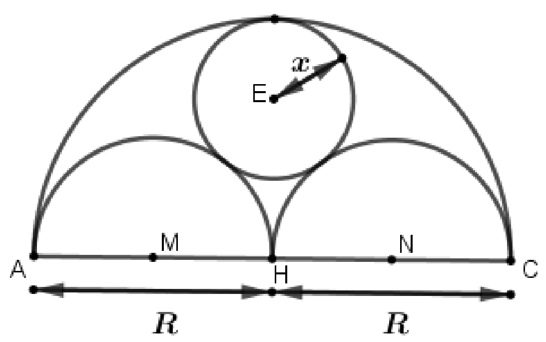
2. On pose : $C = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ et $D = 2$
   Comparer $C$ et $D$

## Exercice 3

Les points $M$ , $H$ , $N$ et $E$ sont les centres des cercles. (Voir figure)

Les cercles sont tangents entre eux.

Démontrer que : $x = \dfrac{R}{3}$



abdoucmcf — Défi N°8 — Classe de 3ème Année

## Olympiades de mathématiques

**Académie Rabat-Kenitra**

25 / 04 / 2014

### Exercice 1

Trouvez les entiers naturels strictement positifs $x$ , $y$ et $z$ qui vérifient l'égalité suivante :

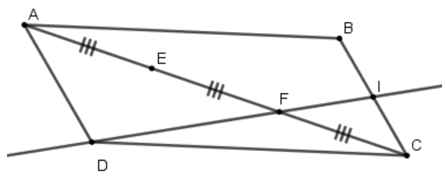
$$\frac{371}{13^2} = x + \frac{y}{13} + \frac{z}{13^2}$$

### Exercice 2

1. $a$ et $b$ sont deux nombres positifs.
   Montrer que : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
2. Montrer que pour tout nombre $x$ strictement positif, on a :

$$1 + x^{2006} \geq \frac{(2x)^{2005}}{(1+x)^{2004}}$$

### Exercice 3




$ABCD$ est un parallélogramme.

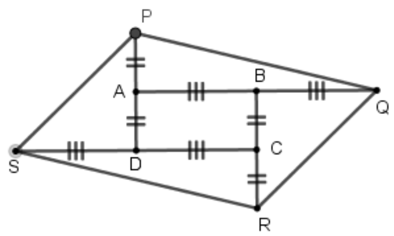
$E$ et $F$ deux points différents de la diagonale $[AC]$

Qui vérifient : $FC = FE = EA$

Le point $I$ est l'intersection de la droite $(DF)$ et du côté $[BC]$.

Montrer que $I$ est le milieu de $[BC]$.

### Exercice 4

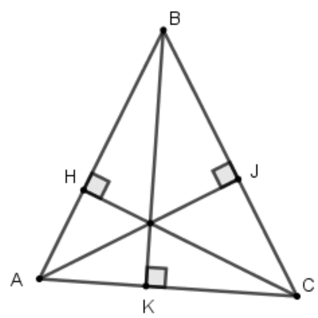



$ABCD$ est un rectangle d'aire $3\,cm^2$.

On construit le quadrilatère $PQRS$ par la méthode indiquée sur la figure.

1. Montrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.
2. Calculer l'aire de $PQRS$ .

### Exercice 5




$ABC$ est un triangle tel que :

$AC = 13$ ; $AB = 14$ *et* $BC = 15$

1. Montrer que la longueur $CH$ est un entier naturel.
2. Montrer que la longueur $AJ$ est un nombre décimal.
3. La longueur $BK$ , est-il un entier, un décimal ou bien une fraction ?

| abdoucmcf | Défi N°9 | Classe de 3ème Année |
|---|---|---|

## Exercice 1

On donne : $a = 1-\sqrt{3}$ et $b = 6\times\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

1. Calculer $a^2$ et $b^2$
2. Montrer que : $b = -3a$
3. On donne : $E = \dfrac{2-\sqrt{12}}{6\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$ montrer que $E$ est un nombre rationnel.

## Exercice 2

$a$ et $b$ sont deux nombres réels non nuls.

Montrer que : $\dfrac{a^2-b^2}{ab} + \dfrac{b^2-ab}{ab-a^2} = \dfrac{a}{b}$

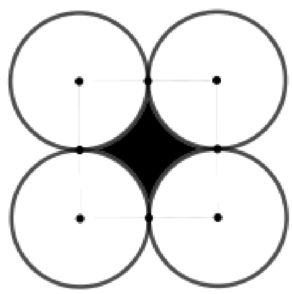
## Exercice 3

$a$ est un nombre réel tel que : $a + \dfrac{1}{a} = \sqrt{5}$

1. Calculer : $a^2 + \dfrac{1}{a^2}$
2. En déduire le calcul de $a^3 + \dfrac{1}{a^3}$ et $a^4 + \dfrac{1}{a^4}$

## Exercice 4

Les quatres cercles ont le même rayon $r$ et sont tangents entre eux.



Calculer l'aire de la partie grisée en fonction de $r$ .

## Exercice 5

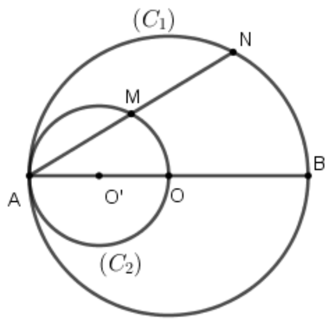
On considère la figure ci-contre où $(C_1)$ est le cercle de centre $O$ ,

et $(C_2)$ est le cercle de centre $O'$.

$(C_1)$ est tangent à $(C_2)$ au point $A$ .

Les points $A$ , $M$ et $N$ sont alignés.

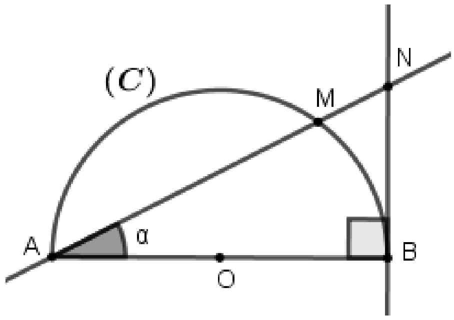
Montrer que : $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AO}{AB} = \dfrac{MO}{NB}$



## Exercice 1

Soit $(C)$ un demi-cercle de diamètre $[AB]$, de centre $O$ et de rayon $R$.
Soit $M$ un point du demi-cercle.
La tangente au cercle au point $B$ coupe la droite $(AM)$ en $N$.
On pose : $B\hat{A}M = \alpha$

1. Calculer $AM$ et $MB$ en fonction de $R$ et de $\alpha$.
2. Calculer $AN$ et $NB$ en fonction de $R$ et de $\alpha$.
3. Montrer que : $MN = 2R\sin\alpha.\tan\alpha$
4. Application : $\alpha = 30^0$ $et$ $R = 10$
   Calculer $MN$ ; $AN$ ; $MB$ $et$ $MA$




## Exercice 2

$ABC$ est un triangle isocèle et rectangle en $A$ tel que $AB = 6$.

Soit $I$ le milieu de $[AC]$ et $J$ la projection orthogonale du point $C$ sur la droite $(BI)$.

Les droites $(CJ)$ et $(AB)$ se coupent au point $K$.

1. Faire une figure.
2. Comparer les triangles $ABI$ et $ICJ$.
3. Montrer que les triangles $ABI$ et $ACK$ sont isométriques.
4. Calculer $BC$ ; $BI$ ; $JC$ $et$ $IJ$.

## Exercice 3

$(C_1)$ est un demi-cercle de diamètre $[AB]$ et de centre $O$.

$(C_2)$ est un demi-cercle de diamètre $[AO]$.

Le point $D$ est le centre du cercle $(C)$ de rayon $x$ qui est

Tangent à la fois aux deux demi-cercles et à la droite $(AB)$.

On pose $OA = r$.

Calculer le rayon du cercle $(C)$ en fonction de $r$.