Exercice 1 $A=\frac{1}{3-\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}-2}$

$$=\frac{1(3+\sqrt{8})}{(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8})}-\frac{1(\sqrt{8}+\sqrt{7})}{(\sqrt{8}-\sqrt{7})(\sqrt{8}+\sqrt{7})}+\frac{1(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})}-\frac{1(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})}+\frac{1(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}$$

$$=\frac{3+\sqrt{8}}{3^2-(\sqrt{8})^2}-\frac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{(\sqrt{8})^2-(\sqrt{7})^2}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{6})^2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}+\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5})^2-2^2}$$

$$=\frac{3+\sqrt{8}}{1}-\frac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{1}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{1}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{1}+\frac{\sqrt{5}+2}{1}$$

$$=3+2$$

$$=5$$

Exercice 2

On a : $$\sqrt{\frac{6+2\sqrt{3}}{33-19\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{(6+2\sqrt{3})(33+19\sqrt{3})}{(33-19\sqrt{3})(33+19\sqrt{3})}}$$

$$=\sqrt{\frac{6\times33+6\times19\sqrt{3}+2\sqrt{3}\times33+2\sqrt{3}\times19\sqrt{3}}{33^2-(19\sqrt{3})^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{6\times33+6\times19\sqrt{3}+6\sqrt{3}\times11+6\times19}{1089-1083}}$$

$$=\sqrt{\frac{6(33+19\sqrt{3}+\sqrt{3}\times11+19)}{6}}$$

$$=\sqrt{52+30\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{25})^2+(\sqrt{27})^2+2\sqrt{3\times15^2}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{25})^2+(\sqrt{27})^2+2\sqrt{3\times3^2\times5^2}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{25})^2+(\sqrt{27})^2+2\sqrt{27}\times\sqrt{25}}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{25}+\sqrt{27}\right)^2}$$

$$= \sqrt{25}+\sqrt{27} = 5+3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{6+2\sqrt{3}}{33-19\sqrt{3}}} = a+b\sqrt{3} \quad = \quad 5+3\sqrt{3} \qquad Donc \quad a+b = 5+3 = 8$$

Exercice 3

$$Soit\ le\ systeme : \begin{cases} ab+ac = 152 & (1) \\ ab+bc = 162 & (2) \\ ac+bc = 110 & (3) \end{cases} \quad \text{Équivalent à} \quad \begin{cases} abc+ac^2 = 152c & c\times(1) \\ abc+bc^2 = 162c & c\times(2) \\ ac^2+bc^2 = 110c & c\times(3) \end{cases}$$

$$(1)+(2) \quad \text{Équivalent à} \quad 2abc+\left(ac^2+bc^2\right) = 314c$$

$$2abc+110c = 314c$$

$$2abc = 204c$$

$$ab = 102$$

D'où : $(2) \quad ab+bc = 162 \quad Equivalent\ à \quad bc = 162-ab = 162-102 = 60$

Soit : $b = \dfrac{60}{c}$

D'où : $(1) \quad ab+ac = 152 \quad Equivalent\ à \quad ac = 152-ab = 152-102 = 50$

Soit : $a = \dfrac{50}{c}$

On a : $ab = 102 \quad Equivalent\ à \quad \dfrac{50}{c}\times\dfrac{60}{c} = 102$

Donc : $c^2 = \dfrac{3000}{102}$

Par suite : $c = \sqrt{\dfrac{3000}{102}} = \sqrt{\dfrac{100\times2\times15}{2\times51}} = 10\sqrt{\dfrac{15}{51}} = 10\dfrac{\sqrt{15}\times\sqrt{51}}{\left(\sqrt{51}\right)^2} = 10\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}\times\sqrt{17}}{51} = \dfrac{30}{51}\sqrt{85}$

Donc : $abc = ab\times c = 102\times\dfrac{30}{51}\sqrt{85} = 60\sqrt{85}$

Exercice 4 1) *Soit* $x=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots\ldots.}}}}}}$

$$x^2=6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots\ldots.}}}}}}$$

$$x^2=6+x$$

Il suffit alors de résoudre cette équation.

$$x^2-x-6=0 \quad \text{Équivalent à} \quad x^2-3x+2x-6=0$$

$$x(x-3)+2(x-3)=0$$

$$(x-3)(x+2)=0$$

Donc : $x-3=0$ *ou* $x+2=0$ $\left(\text{Im}\,possible\ car\quad x>0\right)$

D'où : $x=3$ càd $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots\ldots.}}}}}}=3$

2) *Soit* $x=\sqrt{110-\sqrt{110-\sqrt{110-\sqrt{110-\sqrt{110-\sqrt{110-\ldots\ldots.}}}}}}$

$$x^2=110-\sqrt{110-\sqrt{110-\sqrt{110-\sqrt{110-\sqrt{110-\sqrt{110-\ldots\ldots.}}}}}}$$

$$x^2=110-x$$

Il suffit alors de résoudre cette équation.

$$x^2+x-110=0 \quad \text{Équivalent à} \quad x^2+11x-10x-110=0$$

$$x(x+11)-10(x+11)=0$$

$$(x+11)(x-10)=0$$

Donc : $x-10=0$ *ou* $x+11=0$ $\left(\text{Im}\,possible\ car\quad x>0\right)$

D'où : $x=10$ càd $\sqrt{110-\sqrt{110-\sqrt{110-\sqrt{110-\sqrt{110-\sqrt{110-\ldots\ldots.}}}}}}=10$

Exercice 5 On a : $x=8-\sqrt{60}=8-2\sqrt{15}=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$

Donc : $\sqrt{x}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2+2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10-\sqrt{60}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(10-\sqrt{60}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\sqrt{5}+10\sqrt{3}-\sqrt{300}-\sqrt{180}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(10\sqrt{5}+10\sqrt{3}-10\sqrt{3}-6\sqrt{5}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(4\sqrt{5}\right)$$

$$=\sqrt{5}$$

<u>Exercice 6</u> *Soit le systeme* $\begin{cases} x+y=a-b & (1) \\ ax-by=a^2-b^2 & (2) \end{cases}$

Equivalent à $\begin{cases} bx+by=ab-b^2 & (1)\times b \\ ax-by=a^2-b^2 & (2) \end{cases}$

$(1)+(2)$ *Equivalent à* $bx+by+ax-by=ab-b^2+a^2-b^2$

$$x\left(a+b\right)=ab+a^2$$

$$x=\frac{ab+a^2}{a+b}=\frac{a\left(b+a\right)}{a+b}=a$$

Donc : (1) $x+y=a-b$

$$y=a-b-a=-b$$

Par suite : $x-y=a+b$

Exercice 7

On a : $x^2+5x+k=(x+\alpha)(x+\beta)$ *tel que :* $\alpha+\beta=5$ *et* $\alpha\beta=k$

$$\Big(\underbrace{\alpha+\beta}_{5}\Big)^2=\underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{11}+2\alpha\beta=11+2\alpha\beta=25$$

Donc : $2\alpha\beta=25-11=14$

$\alpha\beta=7$ Par suite $k=7$

Exercice 8

Si $(x+k)$ *est un facteur de* (x^2+px+q) *alors* $x^2+px+q=(x+k)(x+a)$ $a\in\mathbb{R}$

Si $(x+k)$ *est un facteur de* (x^2+lx+m) *alors* $x^2+lx+m=(x+k)(x+b)$ $b\in\mathbb{R}$

On en déduit : $(x^2+px+q)-(x^2+lx+m)=(x+k)(x+a)-(x+k)(x+b)$

$$(p-l)x+(q-m)=(x+k)(a-b)$$

$$(p-l)x+(q-m)=x(a-b)+k(a-b)$$

Donc : $p-l=(a-b)$ *et* $q-m=k(a-b)$

$$k=\frac{q-m}{a-b}=\frac{q-m}{p-l}$$

Exercice 9

On a : $b\tan\theta=a$ *Equivalent à* $\tan\theta=\frac{a}{b}$

Donc : $$\frac{a\sin\theta-b\cos\theta}{a\sin\theta+b\cos\theta}=\frac{\dfrac{a\sin\theta-b\cos\theta}{b\cos\theta}}{\dfrac{a\sin\theta+b\cos\theta}{b\cos\theta}}$$

$$=\frac{\dfrac{a}{b}\tan\theta-1}{\dfrac{a}{b}\tan\theta+1}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+1}\quad=\frac{\dfrac{a^2-b^2}{b^2}}{\dfrac{a^2+b^2}{b^2}}\quad=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

Exercice 10 1) *Soit* $x = \dfrac{1}{5+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{5+....}}}}}$

D'où : $$\frac{1}{x} = 5 + \dfrac{1}{5+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{5+....}}}}}$$

$$\frac{1}{x} = 5 + x$$

Il suffit alors de résoudre cette équation. $x^2 + 5x - 1 = 0$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 1 = 0$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{29}{4} = 0$$

$$\left(x+\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{29}{4}}\right)\left(x+\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{29}{4}}\right) = 0$$

Donc : $x + \dfrac{5-\sqrt{29}}{2} = 0$ *ou* $x + \dfrac{5+\sqrt{29}}{2} = 0$ $(\text{Im}\,\textit{possible car } x > 0)$

D'où : $x = \dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}$ càd $\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{5+....}}}}} = \dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}$

2) $\quad$ $$Soit \quad x = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(\ldots\ldots\ldots)\right)\right)\right)\right)\right]$$

$$3x = \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(\ldots\ldots\ldots)\right)\right)\right)\right)\right]$$

$$3x - \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(\ldots\ldots\ldots)\right)\right)\right)\right)\right]$$

Donc : $\quad 3x - \frac{1}{2} = x$

Il suffit alors de résoudre cette équation. $\quad 3x - x = \frac{1}{2}$

$$2x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Par conséquent : $$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(\ldots\ldots\ldots)\right)\right)\right)\right)\right] = \frac{1}{4}$$