

5

Fonctions linéaires



Je double, moi non plus

Le côté d'un carré mesure 5 cm.

► Calculer son périmètre et son aire.

On double le côté du carré.

► Calculer le périmètre et l'aire du nouveau carré.

Que remarque-t-on ?

Activité 1

Représentation graphique de la proportionnalité

Pendant une semaine de prix promotionnels, le magasin KDO offre une remise de 15 % sur tous les articles.

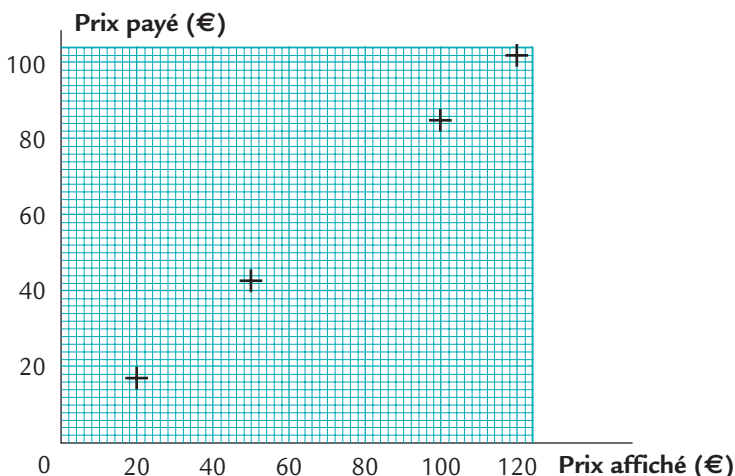
► Reproduire et compléter le tableau suivant.

Prix affiché (€)	100	20	50	120
Prix payé (€)	85			

► Vérifier que ce tableau est un tableau de proportionnalité. Donner le coefficient de proportionnalité.

Le prix payé est proportionnel au prix affiché.

On a placé dans le repère du plan ci-dessous les quatre points correspondant au tableau précédent.



► Prendre une règle et vérifier que la règle passe par les quatre points.

► Par quel autre point particulier du graphique la règle passe-t-elle aussi ?

► Écrire une phrase pour résumer ces observations.

Si deux grandeurs sont proportionnelles, elles sont représentées graphiquement par des points alignés avec l'origine du repère.

Activité 2

Définition d'une fonction linéaire

On veut résumer la situation précédente par une formule.

On désigne par A le prix affiché (en €) et par P le prix payé (en €).

► Parmi les quatre formules suivantes, une seule correspond à la situation décrite à l'activité 1. Laquelle ?

- $P = A - 15$ $P = 0,85A$ $P = 0,15A$ $P = A \div 0,15$

La formule trouvée ci-dessus montre qu'il y a une relation, une correspondance entre le prix affiché A et le prix payé P .

On donne le nom de **fonction** à cette correspondance : P est fonction de A . On désigne souvent la fonction par une lettre, f par exemple.

De plus, cette correspondance traduit ici la proportionnalité entre deux grandeurs ; on dit alors que la **fonction f est linéaire**.

On définit une fonction linéaire f de coefficient a lorsque, à tout nombre x , on fait correspondre le nombre ax .

► Quel est le coefficient de la fonction linéaire f vue dans cette activité ?

Activité 3

Vocabulaire et notations

D'après l'activité 2, la formule $P = 0,85A$ permet de définir la fonction linéaire f de coefficient 0,85.

On va voir comment peut s'écrire une telle fonction linéaire.

On sait que si $A = 20$ (par exemple), alors $P = 0,85 \times 20 = 17$.

Au nombre 20, la fonction f fait correspondre le nombre 17.

On écrit $f: 20 \mapsto 17$ ou $f(20) = 17$ qui se lit « f de 20 égale 17 ».

On dit que 17 est l'**image** de 20 par la fonction f .

La fonction linéaire f de coefficient a se note $f: x \mapsto ax$ ou $f(x) = ax$.

Le nombre ax est l'image de x par la fonction f .

Soit f la fonction linéaire de coefficient 0,85.

► Calculer $f(50)$.

► Quelle est l'image de 100 par la fonction f ?



1 Représentation graphique de la proportionnalité

Si deux grandeurs sont proportionnelles, elles sont représentées graphiquement par des **points alignés avec l'origine** du repère.

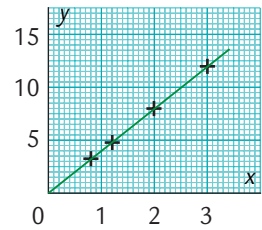
Exemple

× 4	Côté du carré (m)	0,8	1,2	2	3
	Périmètre du carré (m)	3,2	4,8	8	12

Le périmètre d'un carré est proportionnel à la longueur de son côté.

On place dans un repère du plan les quatre points du tableau. Ils sont alignés sur une droite qui passe par l'origine.

ordonnée d'un point = 4 × abscisse du point



2 Définition d'une fonction linéaire

Si les valeurs y d'une grandeur sont proportionnelles aux valeurs x d'une autre grandeur, on a la relation $y = ax$ où a est le coefficient de proportionnalité.

Exemple

Le côté c d'un carré et son périmètre P sont des grandeurs proportionnelles et sont liés par la relation $P = 4c$.

On définit une **fonction linéaire** f de coefficient a lorsque, à tout nombre x , on fait correspondre le nombre ax .

La représentation graphique d'une fonction linéaire f de coefficient a est l'ensemble des **points de coordonnées** $(x; ax)$. C'est une droite qui passe par l'origine du repère.

Exemple

La relation de l'exemple précédent $P = 4c$ correspond à la **fonction linéaire de coefficient 4**.

Sa représentation graphique est la droite tracée dans le premier exemple. C'est l'ensemble des **points de coordonnées** $(x; 4x)$.

3 Vocabulaire et notations

La fonction linéaire f de coefficient a se note $f: x \mapsto ax$ ou $f(x) = ax$.

Le nombre ax est l'image de x par la fonction f .

Exemple

Soit f la **fonction linéaire de coefficient 4**.

On la note $f: x \mapsto 4x$ ou $f(x) = 4x$ qui se lit « f de x égale $4x$ ».

Attention : ces parenthèses n'ont pas le même sens qu'en calcul algébrique ; il n'y a pas de multiplication entre f et la parenthèse.

$f(2,5) = 4 \times 2,5 = 10$; 10 est l'image de 2,5 par f .

1 Comment utiliser un pourcentage de variation

Un commerçant a augmenté tous ses prix de 2 %. Après augmentation, un article coûte 86,70 €.

Calculer le prix avant augmentation.

Les prix avant et après augmentation sont des grandeurs proportionnelles.

● Déterminons le coefficient k qui permet de passer du prix avant augmentation au prix après augmentation.

Sur un prix de 100 €, l'augmentation est de 2 € ; le prix après augmentation est :

$$100 + 2 = 102 \text{ €}. \text{ Le coefficient } k \text{ est donc : } \frac{102}{100} = 1,02.$$

Prix avant augmentation $\begin{array}{c} \xrightarrow{\times 1,02} \\ \xleftarrow{\div 1,02} \end{array}$ prix après augmentation

● L'énoncé peut donc se traduire par l'équation :

$$x \times 1,02 = 86,70 \text{ où } x \text{ est le prix avant augmentation.}$$

$$\text{On a alors } x = \frac{86,70}{1,02} = 85.$$

Le prix avant augmentation est 85 €.

2 Comment représenter graphiquement une fonction linéaire

On donne la fonction linéaire g définie par $g(x) = 0,5x$.

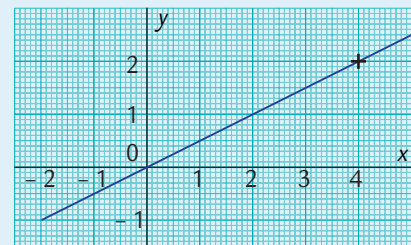
Tracer sa représentation graphique dans un repère orthogonal.

La représentation graphique de la fonction g est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; 0,5x)$ où x est un nombre quelconque. C'est une droite qui passe par l'origine du repère et on obtient l'ordonnée d'un point en multipliant son abscisse par 0,5.

● Il suffit d'un autre point que l'origine pour tracer la droite.

Choisissons par exemple $x = 4$.

$y = g(4) = 0,5 \times 4 = 2$. On place sur le graphique le point de coordonnées $(4 ; 2)$.



● On trace la droite qui passe par l'origine et par le point de coordonnées $(4 ; 2)$.

Conseil Prendre un 2^e point pour contrôler le tracé.

3 Comment déterminer une fonction linéaire

1. À partir de données numériques

Déterminer la fonction linéaire s telle que $s(5) = -2$.

● s est une fonction linéaire, donc $s(x) = ax$.

Déterminer une fonction linéaire, c'est déterminer son coefficient a .

● On sait que $s(5) = -2$.

Si on compare avec $s(x) = ax$, on voit que pour $x = 5$, on doit avoir $ax = -2$.

● Par conséquent, $a \times 5 = -2$, d'où $a = -\frac{2}{5} = -0,4$.

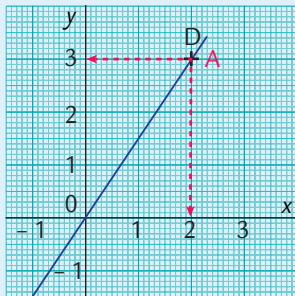
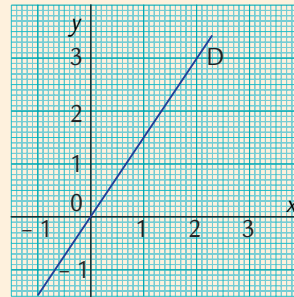
s est la fonction linéaire de coefficient $-0,4$.

s est définie par $s(x) = -0,4x$.

2. À partir de sa représentation graphique

D est la droite représentative d'une fonction linéaire h .

Déterminer cette fonction.



● Lire sur le graphique les coordonnées d'un point de la droite, autre que l'origine. Choisir, si possible, un point dont au moins une des coordonnées est un nombre entier.

Prenons par exemple le point A .

On lit graphiquement que le point A a pour abscisse 2 et pour ordonnée 3.

Donc $h(2) = 3$.

● h est linéaire. Donc $h(x) = ax$.

On obtient : $a \times 2 = 3$, d'où $a = \frac{3}{2} = 1,5$.

h est la fonction linéaire de coefficient 1,5.

$h(x) = 1,5x$

Conseil

Prendre un autre point pour vérifier.

Exercices

Proportionnalité

Exercice 1

► Les deux suites de nombres données dans le tableau suivant sont-elles proportionnelles ? Pourquoi ?

2	3	5	8
1,4	2,1	2,8	5,6

Exercice 2

Ce tableau est un tableau de proportionnalité.

1,2	0,9	
	27	15

- Calculer le coefficient de proportionnalité.
- Compléter le tableau à l'aide de ce coefficient.

Exercice 3 EXERCICE RÉSOLU

Sur une carte routière, on lit que 1 cm représente 2 km : les distances réelles sont proportionnelles aux distances mesurées sur la carte.

- Exprimer 2 km en cm, et expliquer pourquoi on dit que l'échelle de la carte est 1/200 000.
- Compléter le tableau.

Distance sur la carte (cm)	9	
Distance sur le terrain (km)		5

Solution

a) $2 \text{ km} = 200\,000 \text{ cm}$. Les distances sur la carte sont 200 000 fois plus petites que les distances sur le terrain. On dit que l'échelle de la carte est 1/200 000.

b) Distance de la carte = 9 cm
 Distance sur le terrain = $9 \times 200\,000$
 = 1 800 000 cm = 18 km
 Distance sur le terrain = 5 km = 500 000 cm
 Distance sur la carte = $500\,000 \div 200\,000$
 = 2,5 cm

Exercice 4

Sur une carte, 4 cm représentent 1 km.

- Quelle est l'échelle de la carte ?

Exercice 5

Un randonneur utilise une carte au 1/25 000. Il voudrait faire une marche de 24 km.

- Quelle est, en centimètres, la longueur de la randonnée sur la carte ?

Exercice 6

Sur une carte routière à l'échelle 1/1 000 000, deux villes sont distantes de 15 cm.

- Quelle est, en kilomètres, la distance réelle entre les deux villes ?

Exercice 7

Après une augmentation de 5 %, le prix d'un article est 88,20 €.

- Calculer le prix avant augmentation.

Exercice 8

Au mois de juin 2005, un magasin a accueilli 7 050 clients. Le responsable constate qu'il a perdu 6 % de sa clientèle depuis juin 2004.

- Quelle était la fréquentation du magasin en juin 2004 ?

Exercice 9

Après une remise de 15 %, le prix d'un article est 49,30 €.

- Calculer le prix avant remise.

Fonctions linéaires

Exercice 10

- Donner le coefficient de chacune des fonctions linéaires suivantes.

$$f: x \mapsto 1,8x; g: x \mapsto -7x; h: x \mapsto \frac{2}{3}x;$$

$$j: x \mapsto \frac{x}{5}; r: x \mapsto -x; s: x \mapsto \frac{3x}{4}.$$

Exercice 11

- Calculer l'image de 12 et de -2 par chacune des fonctions de l'exercice 10.

EXERCICES ET PROBLÈMES

5. Fonctions linéaires

Exercice 12

On définit la fonction linéaire f par $f(x) = 4x$ et la fonction g par $g : x \mapsto -2,1x$.

► Calculer $f(4)$; $g(0,5)$; $f(-5,2)$; $g(-10)$; $f\left(\frac{5}{3}\right)$; $g(10^3)$.

Exercice 13

On donne la fonction linéaire g définie par $g(x) = 3x$.

► Compléter le tableau suivant.

x	0	4	-6		
$g(x)$				12	-9

Exercice 14

On donne la fonction linéaire h définie par

$$h(x) = \frac{5}{3}x.$$

► Compléter le tableau suivant.

x	0	6	$\frac{3}{4}$		
$h(x)$				15	$\frac{5}{9}$

Exercice 15

a) Calculer le coefficient de la fonction linéaire f telle que $f(5) = 10$.

b) Calculer le coefficient de la fonction linéaire g telle que $g(2) = -6$.

c) Calculer le coefficient de la fonction linéaire h telle que $h(-3) = -12$.

d) Calculer le coefficient de la fonction linéaire j telle que $j\left(\frac{4}{3}\right) = 8$.

Exercice 16

► Déterminer, en donnant leur coefficient, chacune des fonctions linéaires suivantes.

a) Par la fonction linéaire f , 4 a pour image 6.

b) Par la fonction linéaire g , -8 a pour image -4.

c) Par la fonction linéaire h , -12 est l'image de 4.

d) Par la fonction linéaire j , 10 est l'image de 3.

Exercice 17

► Représenter graphiquement dans un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm les fonctions linéaires suivantes.

a) f définie par $f : x \mapsto 1,5x$.

b) g définie par $g(x) = -1,8x$.

c) h définie par $h : x \mapsto \frac{5x}{4}$.

Limiter le tracé à des valeurs de x comprises entre -4 et 4.

Exercice 18

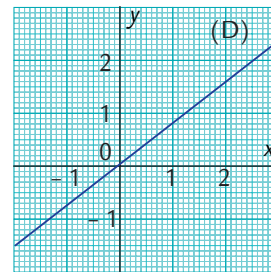
► Sans faire le graphique, répondre à la question suivante.

Les points $A(5 ; 18)$, $B(-2 ; 7,2)$, $C(0 ; 0)$ et $D\left(\frac{1}{3} ; 1,2\right)$ appartiennent-ils à la représentation

graphique de la fonction g définie par $g(x) = 3,6x$?

Exercice 19

La fonction linéaire f est représentée ci-dessous par la droite (D).



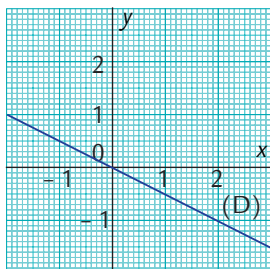
a) Lire sur le graphique les images de 2 et -1.

b) Déterminer le coefficient de la fonction linéaire f .

c) Lire sur le graphique le nombre dont l'image est 0,8.

Exercice 20

La fonction linéaire g est représentée ci-dessous par la droite (D).



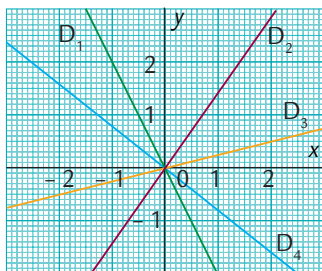
- Lire sur le graphique les images de 2 et -1 .
- Déterminer le coefficient de la fonction linéaire g .
- Lire sur le graphique le nombre dont l'image est $-0,5$.

Exercice 21

► Associer à chacune des fonctions linéaires suivantes sa représentation graphique.

$$f: x \mapsto 1,4x; \quad g: x \mapsto -2x;$$

$$h: x \mapsto \frac{1}{4}x; \quad j: x \mapsto -0,8x.$$



Problèmes

Problème 1

Une personne a touché 600 € pour 30 heures de travail. On suppose que le salaire S est proportionnel au nombre x d'heures de travail.

- Exprimer S en fonction de x .
- Représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x) = S$ pour x compris entre 0 et 40.

Unités graphiques : en abscisse, 1 cm pour 5 heures ; en ordonnée, 1 cm pour 100 €.

- Déterminer graphiquement le nombre d'heures de travail correspondant à un salaire de 260 €. Retrouver ce résultat par le calcul.

Problème 2

Dans une opération de promotion, un magasin accorde une remise de 6 % sur les prix affichés.

- Le montant de la remise est proportionnel au prix affiché. Quel est le coefficient de proportionnalité ?
- Déterminer la fonction linéaire f qui, au prix affiché x , fait correspondre la remise.
- Le montant du prix à payer est proportionnel au prix affiché. Quel est le coefficient de proportionnalité ?
- Déterminer la fonction linéaire g qui, au prix affiché x , fait correspondre le prix à payer.
- Représenter graphiquement les fonctions f et g pour $0 \leq x \leq 1\,000$.

Problème 3

► Traduire chacune des situations suivantes par une fonction linéaire.

- Une documentaliste achète x livres à 12 € chacun.
Exprimer le coût total $c(x)$ en fonction de x .
- Un robinet débite 3,2 litres par minute. Il coule pendant x minutes.
Exprimer le nombre de litres débités $d(x)$ en fonction de x .
- La voiture de monsieur Foucher consomme 6 litres aux 100 km. Il parcourt x km.
Exprimer le nombre de litres consommés $l(x)$ en fonction de x .

Problème 4

1. Un cylindre de révolution a un rayon de base de 3 cm et une hauteur égale à h cm.

- Exprimer le volume $V(h)$ du cylindre en fonction de h .

b) V est-elle une fonction linéaire ?

2. Un parallépipède rectangle a une base carrée de côté c (en cm) et une hauteur de 5 cm.

- Exprimer le volume $V(c)$ du parallépipède rectangle en fonction de c .

b) V est-elle une fonction linéaire ?

Les mathématiques dans...

5. Fonctions linéaires



...la comptabilité

1 Pourcentages et facture

Dans cet exercice, les prix seront arrondis au centime d'euro et les coefficients multiplicateurs donnés avec cinq chiffres après la virgule.

Monsieur Paul est gestionnaire dans une entreprise appelée Matbat.

Il doit vérifier rapidement les factures éditées, et les corriger le cas échéant.


Il s'intéresse maintenant à la facture de Monsieur Durant.

1. Calculer le montant de la réduction et le prix réduit.
2. Calculer l'escompte sur le prix réduit.
3. Calculer le prix net HT.
4. Calculer la TVA et le prix total TTC.
5. Calculer les coefficients multiplicateurs c_1 et c_2 associés à chaque remise tels que :

$$\text{prix réduit} = c_1 \times \text{prix initial}$$

$$\text{prix net HT} = c_2 \times \text{prix réduit}$$

6. La réduction totale est-elle de 14,5 % du prix initial ? Justifier la réponse.
7. Est-il possible de calculer un coefficient multiplicateur permettant de passer directement du prix initial au prix total TTC ? Justifier la réponse.
8. La société Matbat facture la livraison à hauteur de 1,75 % du prix total TTC. Calculer le prix réellement payé par le client livré.
Calculer le nouveau coefficient multiplicateur permettant de calculer le prix payé à partir du prix initial.
9. Quel serait ce coefficient multiplicateur si l'entreprise facture avec une promotion de 15 %, un escompte de 3,25 %, une TVA de 19,6 % et des frais de livraison à 2 % ?
10. Dans le cas où les frais de livraison sont fixés à 38,45 € quelles que soient les marchandises et le prix total TTC, est-il possible de déterminer un coefficient multiplicateur entre le prix initial et le prix payé par le client livré ? Justifier la réponse.

	
Rue Pasteur 22410 Saint-Quay-Portrieux	
Facture n° 14 122 005	
Le 23 février	
Client n° 5 752 Henri Durant Rue des Glycines 69500 BRON	
DÉSIGNATION	PRIX EN EUROS
Lots fenêtres PVC	8 540 HT
❖ Réduction promo (12,5 %)	...
❖ Prix réduit	...
❖ Escompte paiement comptant (2 %)	...
❖ Prix net HT	...
❖ TVA (5,5 %)	...
Total (TTC)	...



...la vie professionnelle

2 Des commissions pour motiver

Un pourcentage est défini par tranches lorsque le taux est différent suivant les intervalles ou tranches de la valeur sur laquelle il s'applique.

Pour motiver leurs commerciaux, certaines entreprises leur accordent des commissions calculées sur le montant des ventes réalisées. Les taux sont progressifs et s'appliquent par tranche.

Un représentant touche une commission calculée selon le barème suivant :

- pour un montant des ventes inférieur à 10 000 €, il reçoit 3 % ce montant ;
- pour un montant des ventes supérieur à 10 000 € et inférieur à 60 000 €, il reçoit 3 % de 10 000 € plus 4 % du reste du montant ;
- pour un montant des ventes supérieur à 60 000 €, il reçoit 3 % de 10 000 €, plus 4 % de 60 000 € et 5 % du reste du montant.

1. On veut calculer sa commission pour un montant des ventes de 100 000 €.

a) Le représentant reçoit une commission de 3 % sur les 10 000 premiers euros du montant des ventes.

Calculer la commission correspondant à cette première tranche.

b) Il reçoit une commission de 4 % sur la partie du montant des ventes comprise entre 10 000 et 60 000 €.

Quel est le montant de cette tranche ?

Calculer la commission correspondant à cette deuxième tranche.

c) Il reçoit une commission de 5 % sur la partie du montant des ventes qui dépasse 60 000 €.

Quel est le montant de cette tranche ?

Calculer la commission correspondant à cette troisième tranche.

d) Calculer le montant total de la commission.

2. Calculer le montant de la commission du représentant pour un montant des ventes de 50 000 €.

