Evaluations de sommes et produits

Exercice 1

a. Si nous employons l'égalité : $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$

Alors : $\dfrac{1}{1\times 2}=1-\dfrac{1}{2}$

$$\dfrac{1}{2\times 3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$$

$$\dfrac{1}{3\times 4}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$$

$$\dfrac{1}{(n-1)\times n}=\dfrac{1}{(n-1)}-\dfrac{1}{n}$$

D'où :

$$\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\times n}=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\ldots\ldots\ldots+\left(\dfrac{1}{(n-1)}-\dfrac{1}{n}\right)$$

$$\boxed{\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\times n}=1-\dfrac{1}{n}}$$

b. On a : $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{(k+1)}\left[\dfrac{1}{k(k+2)}\right]$

$$\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(k+1)}\left[\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right]$$

$$\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

Donc : $\dfrac{1}{1\times 2\times 3}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1\times 2}-\dfrac{1}{2\times 3}\right]$

$$\dfrac{1}{2\times 3\times 4}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2\times 3}-\dfrac{1}{3\times 4}\right]$$

$$\dfrac{1}{3\times 4\times 5}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3\times 4}-\dfrac{1}{4\times 5}\right]$$

$$\dfrac{1}{(n-2)\times(n-1)\times n}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(n-2)\times(n-1)}-\dfrac{1}{(n-1)\times n}\right]$$

D'où :

$$\dfrac{1}{1\times 2\times 3}+\dfrac{1}{2\times 3\times 4}+\dfrac{1}{3\times 4\times 5}+\ldots\ldots\ldots\ldots\dfrac{1}{(n-2)\times(n-1)\times n}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}\right]+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-2)\times(n-1)}-\frac{1}{(n-1)\times n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n-1)\times n}\right]$$

$$\boxed{\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{(n-2)\times(n-1)\times n}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n-1)\times n}\right]}$$

c. On a : $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\left[\dfrac{1}{k(k+3)}\right]$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right]$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right]$$

Donc :

$$\frac{1}{1\times2\times3\times4}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1\times2\times3}-\frac{1}{2\times3\times4}\right]$$

$$\frac{1}{2\times3\times4\times5}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2\times3\times4}-\frac{1}{3\times4\times5}\right]$$

$$\frac{1}{3\times4\times5\times6}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3\times4\times5}-\frac{1}{4\times5\times6}\right]$$

$$\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)}-\frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right]$$

D'où :

$$\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\frac{1}{2\times3\times4\times5}+\frac{1}{3\times4\times5\times6}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1\times2\times3}-\frac{1}{2\times3\times4}\right]+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2\times3\times4}-\frac{1}{3\times4\times5}\right]+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3\times4\times5}-\frac{1}{4\times5\times6}\right]+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)}-\frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1\times2\times3}-\frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right]$$

$$\boxed{\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\frac{1}{2\times3\times4\times5}+\frac{1}{3\times4\times5\times6}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right]}$$

Exercice 2

a. Au rang 1 : $\underbrace{1\times 2}_{rang\ 1}=\frac{1\times 2\times 3}{3}=\frac{2\times 3}{3}$

Au rang 2 : $\underbrace{1\times 2+2\times 3}_{rang\ 2}=\frac{2\times 3}{3}+2\times 3=\frac{2\times 3}{3}+\frac{2\times 3\times 3}{3}=\frac{2\times 3(1+3)}{3}=\frac{2\times 3\times 4}{3}$

Au rang 3 :

$$\underbrace{1\times 2+2\times 3+3\times 4}_{rang\ 3}=\frac{2\times 3\times 4}{3}+3\times 4=\frac{2\times 3\times 4}{3}+\frac{3\times 3\times 4}{3}=\frac{3\times 4(2+3)}{3}=\frac{3\times 4\times 5}{3}$$

Au rang 4 :

$$\underbrace{1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5}_{rang\ 4}=\frac{3\times 4\times 5}{3}+4\times 5=\frac{3\times 4\times 5}{3}+\frac{3\times 4\times 5}{3}=\frac{4\times 5(3+3)}{3}=\frac{4\times 5\times 6}{3}$$

On en déduit au rang n :

$$\boxed{\underbrace{1\times 2+2\times 3+3\times 4+\dots\dots\dots\dots\dots n\times(n+1)}_{rang\ n}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

b. Au rang 1 : $\underbrace{1\times 2\times 3}_{rang\ 1}=\frac{1\times 2\times 3\times 4}{4}$

Au rang 2 :

$$\underbrace{1\times 2\times 3+2\times 3\times 4}_{rang\ 2}=\frac{1\times 2\times 3\times 4}{4}+2\times 3\times 4=\frac{1\times 2\times 3\times 4}{4}+\frac{2\times 3\times 4\times 5}{5}=\frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5}{20}+\frac{2\times 3\times 4\times 5\times 4}{20}=\frac{2\times 3\times 4\times 5(1+4)}{5\times 4}=\frac{2\times 3\times 4\times 5}{4}$$

Au rang 3 :

$$\underbrace{1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+3\times 4\times 5}_{rang\ 3}=\frac{2\times 3\times 4\times 5}{4}+3\times 4\times 5=\frac{2\times 3\times 4\times 5}{4}+\frac{3\times 4\times 5\times 6}{6}=\frac{2\times 3\times 4\times 5\times 6}{4\times 6}+\frac{3\times 4\times 5\times 6\times 4}{4\times 6}=\frac{3\times 4\times 5\times 6(2+4)}{4\times 6}=\frac{3\times 4\times 5\times 6}{4}$$

On en déduit au rang n :

$$\underbrace{1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+3\times 4\times 5+\dots\dots\dots+n(n+1)(n+2)}_{rang\ n}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Exercice 3 Calcul des sommes suivantes :

a. On sait que : $1+2+3+\dots\dots\dots+(k-1)=\frac{(k-1)\times k}{2}$

Donc : $1+2+3+\dots\dots\dots+(k-1)+k^2=\frac{(k-1)\times k}{2}+k^2$

C'est-à-dire : $1+2+3+\dots\dots\dots+(k-1)+k^2=\frac{3}{2}k^2-\frac{1}{2}k$

Pour $k=1$: $1^2=\frac{3}{2}\times 1^2-\frac{1}{2}\times 1$

Pour $k=2$: $1+2^2=\frac{3}{2}\times 2^2-\frac{1}{2}\times 2$

Pour $k=3$: $1+2+3^2=\frac{3}{2}\times 3^2-\frac{1}{2}\times 3$

Pour $k=4$: $1+2+3+4^2=\frac{3}{2}\times 4^2-\frac{1}{2}\times 4$

....

Pour $k=n$: $1+2+3+\dots\dots\dots+(n-1)+n^2=\frac{3}{2}\times n^2-\frac{1}{2}\times n$

En faisant la somme des termes, alors :

$$1^2+(1+2^2)+(1+2+3^2)+\dots\dots\dots+(1+2+3+\dots\dots+(n-1)+n^2)=\frac{3}{2}(1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2)-\frac{1}{2}(1+2+3+\dots\dots\dots+n)$$

$$(1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots\dots\dots+n^2)+1+(1+2)+(1+2+3)+\dots\dots\dots+(1+2+3+\dots\dots\dots(n-1))=$$

$$\frac{3}{2}(1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2)-\frac{1}{2}(1+2+3+\dots\dots\dots+n)$$

$$(1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots\dots\dots+n^2)+(n-1)\times 1+(n-2)\times 2+(n-3)\times 3+\dots\dots\dots\dots[n-(n-1)]\times(n-1)=$$

$$\frac{3}{2}(1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2)-\frac{1}{2}(1+2+3+\dots\dots\dots+n)$$

$$(1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots\dots\dots+n^2)+1n-1^2+2n-2^2+3n-3^2+\dots\dots\dots\dots+n(n-1)-(n-1)^2=$$

$$\frac{3}{2}(1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2)-\frac{1}{2}(1+2+3+\dots\dots\dots+n)$$

$$n^2+1n+2n+3n+\dots\dots\dots\dots+n(n-1)=$$

$$\frac{3}{2}(1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2)-\frac{1}{2}(1+2+3+\dots\dots\dots+n)$$

$$n^2+n(1+2+3+\dots\dots\dots\dots\dots+(n-1))=$$

$$\frac{3}{2}(1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2)-\frac{1}{2}(1+2+3+\dots\dots\dots+n)$$

$$n^2+n\frac{(n-1)n}{2}=\frac{3}{2}(1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2)-\frac{1}{2}(1+2+3+\dots\dots\dots+n)$$

$$n^2\left(1+\frac{n-1}{2}\right)=\frac{3}{2}\left(1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2\right)-\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{3}{2}\left(1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2\right)=n^2\left(1+\frac{n-1}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{2}{3}\left[\frac{3}{2}\left(1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2\right)\right]=\frac{2}{3}\left[n^2\left(1+\frac{n-1}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2=\frac{2}{3}\left[n^2\left(\frac{n+1}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2=\frac{2n^2(n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2=\frac{n(n+1)}{6}\times 2n+\frac{n(n+1)}{6}\times 1$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2=\frac{n(n+1)}{6}(1+2n)$$

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2=\frac{n(n+1)(1+2n)}{6}}$$

b. On a vu que : $$1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+(k-1)^2=\frac{(k-1)k\left(1+2(k-1)\right)}{6}$$

C'est-à-dire : $$1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+(k-1)^2=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}$$

Donc : $$1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+(k-1)^2+k^3=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}+k^3$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+(k-1)^2+k^3=\frac{k}{6}\left(2k^2-k-2k+1\right)+k^3$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+(k-1)^2+k^3=\frac{k}{6}\left(2k^2-3k+1\right)+k^3$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+(k-1)^2+k^3=\frac{k^3}{3}-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{6}+k^3$$

D'où : $$\boxed{1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+(k-1)^2+k^3=\frac{4}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{6}k}$$

Pour $k=1$: $$1^3=\frac{4}{3}\times 1^3-\frac{1}{2}\times 1^2+\frac{1}{6}\times 1$$

Pour $k=2$: $$1^2+2^3=\frac{4}{3}\times 2^3-\frac{1}{2}\times 2^2+\frac{1}{6}\times 2$$

Pour $k=3$: $$1^2+2^2+3^3=\frac{4}{3}\times 3^3-\frac{1}{2}\times 3^2+\frac{1}{6}\times 3$$

Pour $k=4$: $$1^2+2^2+3^2+4^3=\frac{4}{3}\times 4^3-\frac{1}{2}\times 4^2+\frac{1}{6}\times 4$$

....

Pour $k=n$: $$1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots\dots+(n-1)^2+n^3=\frac{4}{3}\times n^3-\frac{1}{2}\times n^2+\frac{1}{6}\times n$$

En faisant la somme des termes, alors :

$$1^3+\left(1^2+2^3\right)+\left(1^2+2^2+3^3\right)+\dots\dots\dots+\left(1^2+2^2+3^2+\dots\dots+(n-1)^2+n^3\right)=$$

$$\left(\frac{4}{3}\times 1^3-\frac{1}{2}\times 1^2+\frac{1}{6}\times 1\right)+\left(\frac{4}{3}\times 2^3-\frac{1}{2}\times 2^2+\frac{1}{6}\times 2\right)+\left(\frac{4}{3}\times 3^3-\frac{1}{2}\times 3^2+\frac{1}{6}\times 3\right)+\dots\dots\dots+\left(\frac{4}{3}\times n^3-\frac{1}{2}\times n^2+\frac{1}{6}\times n\right)$$

$$\left[1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3\right]+\left[(n-1)\times 1^2+(n-2)\times 2^2+(n-3)\times 3^2+\dots\dots\dots+\left[n-(n-1)\right]\times(n-1)^2\right]=$$

$$\frac{4}{3}\left[1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3\right]-\frac{1}{2}\left[1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2\right]+\frac{1}{6}\left[1+2+3+\dots\dots+n\right]$$

$$\left[1\times 1^2+2\times 2^2+3\times 3^2+\dots\dots+n\times n^2\right]$$
$$+\left[(n-1)\times 1^2+(n-2)\times 2^2+(n-3)\times 3^2+\dots\dots\dots+\left[n-(n-1)\right]\times(n-1)^2\right]=$$
$$\frac{4}{3}\left[1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3\right]-\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(1+2n)}{6}+\frac{1}{6}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\left[1\times 1^2+2\times 2^2+3\times 3^2+\dots\dots+n\times n^2\right]$$
$$+\left[n\times 1^2-1\times 1^2+n\times 2^2-2\times 2^2+n\times 3^2-3\times 3^2+\dots\dots+n\times(n-1)^2-(n-1)\times(n-1)^2\right]$$

$$\frac{4}{3}\left[1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3\right]-\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(1+2n)}{6}+\frac{1}{6}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$n\left(1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots\dots+n^2\right)=\frac{4}{3}\left[1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3\right]-\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(1+2n)}{6}+\frac{1}{6}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$n\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]=\frac{4}{3}\left[1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3\right]-\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(1+2n)}{6}+\frac{1}{6}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{4}{3}\left[1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3\right]-\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(1+2n)}{6}+\frac{1}{6}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{4}{3}\left[1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3\right]=\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(1+2n)}{6}-\frac{1}{6}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\left[1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3\right]=\frac{3}{4}\times\left[\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(1+2n)}{6}-\frac{1}{6}\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$1^3+2^3+3^3+\dots\dots\dots\dots+n^3=\frac{3}{4}\times\frac{n(n+1)}{6}\left[n(2n+1)+\frac{1}{2}(1+2n)-\frac{1}{2}\right]$$

$$1^3+2^3+3^3+\dots\dots\dots\dots+n^3=\frac{3}{4}\times\frac{n(n+1)}{6}\left[2n^2+n+\frac{1}{2}+n-\frac{1}{2}\right]$$

$$1^3+2^3+3^3+\dots\dots\dots\dots+n^3=\frac{3}{4}\times\frac{n(n+1)}{6}\left[2n^2+2n\right]$$

$$1^3+2^3+3^3+\dots\dots\dots\dots+n^3=\frac{3}{4}\times\frac{n(n+1)}{2\times 3}\left[2n(n+1)\right]$$

Donc :

$$\boxed{1^3+2^3+3^3+\dots\dots\dots\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

c. On a : $(k+1)^5=(k+1)^2(k+1)^2(k+1)$

$$=\left(k^2+2k+1\right)\left(k^2+2k+1\right)(k+1)$$
$$=\left(k^4+2k^3+k^2+2k^3+4k^2+2k+k^2+2k+1\right)(k+1)$$
$$=\left(k^4+4k^3+6k^2+4k\right)(k+1)$$
$$=k^5+k^4+4k^4+4k^3+6k^3+6k^2+4k^2+4k$$
$$=k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$$

Pour $k=1$: $2^5=1^5+5\times1^4+10\times1^3+10\times1^2+5\times1+1$

Pour $k=2$: $3^5=2^5+5\times2^4+10\times2^3+10\times2^2+5\times2+1$

Pour $k=3$: $4^5=3^5+5\times3^4+10\times3^3+10\times3^2+5\times3+1$

....

Pour $k=n$: $(n+1)^5=n^5+5\times n^4+10\times n^3+10\times n^2+5\times n+1$

En faisant la somme des termes, alors :

$$2^5+3^5+4^5+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+n^5+(n+1)^5=$$
$$\left(1^5+5\times1^4+10\times1^3+10\times1^2+5\times1+1\right)+\left(2^5+5\times2^4+10\times2^3+10\times2^2+5\times2+1\right)+$$
$$\left(3^5+5\times3^4+10\times3^3+10\times3^2+5\times3+1\right)+\dots\dots+\left(n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1\right)$$
$$2^5+3^5+4^5+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+n^5+(n+1)^5=\left(1^5+2^5+3^5+\dots\dots\dots\dots+n^5\right)$$
$$+5\left(1^4+2^4+3^4+\dots\dots\dots\dots+n^4\right)+10\left(1^3+2^3+3^3+\dots\dots\dots\dots+n^3\right)+10\left(1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots\dots+n^2\right)$$
$$+5\left(1+2+3+\dots\dots\dots+n\right)+\underbrace{\left(1+1+1+\dots\dots+1\right)}_{n\ fois}$$

Equivalent , en utilisant les résultats précédents :

$$(n+1)^5 = 1^5 + 5\left(1^4+2^4+3^4+\dots\dots\dots\dots+n^4\right) + 10\left(1^3+2^3+3^3+\dots\dots\dots\dots+n^3\right)$$
$$+10\left(1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots\dots+n^2\right) + 5\left(1+2+3+\dots\dots\dots\dots+n\right) + \underbrace{(1+1+1+\dots\dots\dots+1)}_{n\ fois}$$

$$(n+1)^5 = 1^5 + 5\left(1^4+2^4+3^4+\dots\dots\dots\dots+n^4\right) + 10\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 10\frac{n(n+1)(1+2n)}{6} + 5\frac{n(n+1)}{2} + n$$
$$5\left(1^4+2^4+3^4+\dots\dots\dots+n^4\right) = \underbrace{(n+1)^5 - 1^5} - \left[10\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 10\frac{n(n+1)(1+2n)}{6} + 5\frac{n(n+1)}{2} + n\right]$$

En développant les produits, alors :

$$5\left(1^4+2^4+3^4+\dots\dots\dots+n^4\right) = \underbrace{\left(n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n\right)} - \frac{5}{2}\left(n^4+2n^3+n^2\right)$$
$$-\frac{5}{3}\left(2n^3+3n^2+n\right) - \frac{5}{2}\left(n^2+n\right) - n$$

En réduisant, alors :

$$5\left(1^4+2^4+3^4+\dots\dots\dots+n^4\right) = n^5 + \frac{5}{2}n^4 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{1}{6}n$$
$$1^4+2^4+3^4+\dots\dots\dots+n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{6}$$
$$1^4+2^4+3^4+\dots\dots\dots+n^4 = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$
$$1^4+2^4+3^4+\dots\dots\dots+n^4 = \frac{n\left(6n^4+15n^3+10n^2-1\right)}{30}$$

On a : $6n^4+15n^3+10n^2-1 = 5n^4+n^4-1+15n^3+10n^2$
$$= \left(n^4-1\right) + 5n^2\left(n^2+3n+2\right)$$
$$= \left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right) + 5n^2\left(n^2+3n+2\right)$$
$$= (n+1)(n-1)\left(n^2+1\right) + 5n^2(n+1)(n+2)$$
$$= (n+1)\left[(n-1)\left(n^2+1\right) + 5n^2(n+2)\right]$$
$$= (n+1)\left[n^3+n-n^2-1+5n^3+10n^2\right]$$
$$= (n+1)\left[6n^3+9n^2+n-1\right]$$

Donc : $1^4+2^4+3^4+\dots\dots\dots+n^4 = \dfrac{n(n+1)\left(6n^3+9n^2+n-1\right)}{30}$

On a : $6n^3+9n^2+n-1 = 2n\times 3n^2 + 3\times 3n^2 + n - 1$
$$= 3n^2(2n+3) + n - 1$$
$$= 3n^2(2n+1+2) + n - 1$$
$$= 3n^2(2n+1) + 6n^2 + n - 1$$

$$=3n^2(2n+1)+6n^2+\underbrace{3n-2n}-1$$

$$=3n^2(2n+1)+3n(2n+1)-(2n+1)$$

$$=(2n+1)\left[3n^2+3n-1\right]$$

Donc : $$\boxed{1^4+2^4+3^4+\ldots\ldots\ldots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)3\left(6n^2+3n-1\right)}{30}}$$

d. Soit : $S_n=1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ (Voir précédemment)

$$S_{2n}=\left[1^3+3^3+5^3+\ldots\ldots\ldots+(2n-3)^3+(2n-1)^3\right]+\left[2^3+4^3+6^3+\ldots\ldots\ldots+(2n)^3\right]$$

Donc : $$1^3+3^3+5^3+\ldots\ldots\ldots+(2n-3)^3+(2n-1)^3=S_{2n}-\left[2^3+4^3+6^3+\ldots\ldots\ldots+(2n)^3\right]$$

$$=S_{2n}-2^3\left[1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots+n^3\right]$$

$$=S_{2n}-8\left[1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots+n^3\right]$$

$$=S_{2n}-8S_n$$

$$=\frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4}-8\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$=n^2(2n+1)^2-2n^2(n+1)^2$$

$$=n^2\left(4n^2+4n+1\right)-2n^2\left(n^2+2n+1\right)$$

$$=n^2\left(4n^2+4n+1-2n^2-4n-2\right)$$

$$=n^2\left(2n^2-1\right)$$

D'où : $$\boxed{1^3+3^3+5^3+\ldots\ldots\ldots+(2n-3)^3+(2n-1)^3=n^2\left(2n^2-1\right)}$$

<u>Exercice 4</u>

Soit : $$A=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\left(1+\frac{1}{3^{2n}}\right)$$

Donc : $$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times A=\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\right]\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\left(1+\frac{1}{3^{2n}}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times A=\left[\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\right]\left(1+\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\left(1+\frac{1}{3^{2n}}\right)$$

..

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times A=\left[\left(1-\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\right]\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\left(1+\frac{1}{3^{2n}}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times A=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times A=\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)\left(1+\frac{1}{3^{2n}}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times A=\left(1-\frac{1}{\left(3^{2n}\right)^2}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times A=\left(1-\frac{1}{3^{4n}}\right)$$

D'où : $$A=\frac{\left(1-\frac{1}{3^{4n}}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3^{4n}}\right)$$

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\left(1+\frac{1}{3^{2n}}\right)==\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3^{4n}}\right)}$$

Exercice 5 Soient : $A=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times\frac{99}{100}$

Et $B=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times\frac{98}{99}$

On a : $\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$; $\frac{4}{5}>\frac{3}{4}$; $\frac{6}{7}>\frac{5}{6}$; $\frac{8}{9}>\frac{7}{8}$; ……………… $1>\frac{99}{100}$

Donc : $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times\frac{98}{99}>\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times\frac{99}{100}$

C'est-à-dire : $B>A$

D'où : $A\times A<A\times B$

$$A^2<\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times\frac{99}{100}\right)\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times\frac{98}{99}\right)$$

$$A^2<\frac{1}{100}$$

Par conséquent : $A<\sqrt{\frac{1}{100}}$

$$A<\frac{1}{10}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times\frac{99}{100}<\frac{1}{10}}$$