

Evaluations de sommes et produits

Exercice 1 Calculer les sommes suivantes :

$$a. \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \times n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$b. \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{(n-2) \times (n-1) \times n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$c. \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5 \times 6} + \dots + \frac{1}{(n-3) \times (n-2) \times (n-1) \times n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Exercice 2 Prouver que :

$$a. 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$b. 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \dots + n \times (n+1) \times (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Exercice 3 Calculer les sommes suivantes :

$$a. 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$b. 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$c. 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$d. 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-3)^3 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Exercice 4 Simplifier l'expression suivante :

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{9}\right) \left(1 + \frac{1}{81}\right) \left(1 + \frac{1}{3^8}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{3^{2n}}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Exercice 5 Prouver que :

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$