CHAPITRE 10

Fonctions affines

Je vais apprendre pour une fonction affine à :

- calculer l'image ou l'antécédent d'un nombre ;
- la représenter graphiquement par une droite ;
- déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de cette droite ;
- caractériser l'appartenance d'un point M $(x\,;y)$ à cette droite par la relation $y = ax + b$;
- déterminer son expression à partir de deux nombres et leurs images ou bien à partir de la droite qui la représente dans un repère.

Ce scientifique sort des tissus qui étaient conservés dans l'azote liquide. La température d'ébullition de l'azote liquide est de 77,36 K (kelvin). Pour exprimer une température t en kelvins en une température T en °C on utilise la formule $T = t - 273,15$.

Devinette

Programme de calcul
- Multiplier par 2.
- Ajouter 3 au résultat.

Nicolas : « Je choisis 5 et j'effectue 20 fois de suite ce programme. Je parie que j'obtiens un nombre plus grand que 10 000 000 ». Qu'en pensez-vous ?

Devinette

Élise considère l'équation :

$$47x + 35y = 1.$$

Elle affirme :

« Pour $x = 3$, je trouve $y = -4$ ».

Sauriez-vous trouver un autre couple solution de cette équation avec x et y nombres entiers relatifs ?

Voir les indices p. 309

Je vérifie mes acquis

QCM interactif

Pour chaque exercice, une seule réponse est exacte. Laquelle ?

1 **Comprendre le vocabulaire** → voir formulaire § 4 p. 301

La somme de –7 et du produit d'un nombre x par 5 peut s'écrire …

a. $x - 35$ **b.** $5x - 7$ **c.** $5x - 35$

2 **Écrire une expression littérale** → voir formulaire § 10 p. 304

x désigne un nombre positif.

Le périmètre P du rectangle ci-contre, en fonction de x, peut s'écrire …

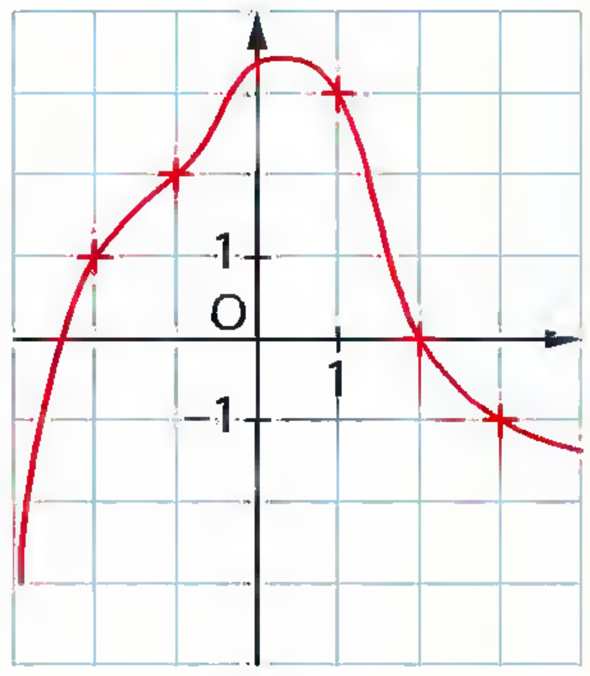
a. $P = 2x + 22$ **b.** $P = 8x + 24$ **c.** $P = 2x + 19$

3 **Lire graphiquement une image** → voir chapitre 8 p. 155

Le graphique ci-contre définit une fonction f.

L'image de –1 par cette fonction est …

a. 0 **b.** 2 **c.** 3



4 **Lire graphiquement un antécédent** → voir chapitre 8 p. 155

Le graphique ci-contre définit une fonction f.

Un antécédent de 0 par cette fonction est …

a. 3,5 **b.** –2 **c.** 2

5 **Reconnaître une fonction linéaire** → voir chapitre 9 p. 173

Parmi les fonctions proposées, la fonction linéaire est …

a. $x \mapsto 2$ **b.** $x \mapsto -2x$ **c.** $x \mapsto 2x^2$

6 **Déterminer le coefficient d'une fonction linéaire** → voir chapitre 9 p. 177

f est la fonction linéaire telle que :

$$f(-12) = 8.$$

Le coefficient de cette fonction linéaire est …

a. $-\frac{3}{2}$ **b.** $-0{,}67$ **c.** $-\frac{2}{3}$

Calcul mental

SOCLE **7** x désigne un nombre et $A = -3x + 4{,}5$. Calculer mentalement A lorsque :

a. $x = 0$ **b.** $x = 2$ **c.** $x = -2$ **d.** $x = -3{,}5$ **e.** $x = \frac{2}{3}$

SOCLE **8** Moussa : « Je multiplie un nombre par 4 et je retranche 5 au résultat ».

Calculer mentalement le nombre obtenu par Moussa lorsqu'il choisit au départ :

a. 10 **b.** –20 **c.** 4,5 **d.** 0,5 **e.** 6,3

9 f est une fonction définie par $f(x) = ax$ où a désigne un nombre.

Déterminer mentalement a lorsque :

a. $f(-2) = 5$ **b.** $f(5) = -2$ **c.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = 12$ **d.** $f\left(-\frac{1}{4}\right) = -5$

Réponses p. 309

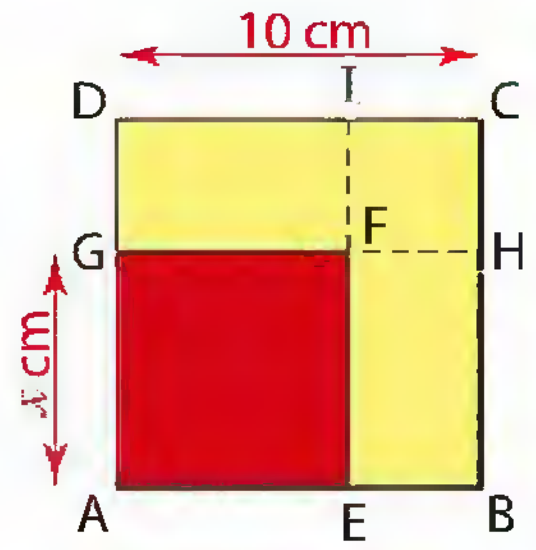
Activités

Fonctions affines

1 Reconnaître un tableau de proportionnalité B2i Math et ARTS

Voici une figure géométrique qui s'inspire de l'œuvre ci-contre.
ABCD, AEFG et ICHF sont des carrés et x un nombre variable entre 0 et 10. On note, en cm :

- $f(x)$ le périmètre du carré AEFG ;
- $g(x)$ le périmètre de l'hexagone BCDGFE ;
- $h(x)$ le périmètre du carré ICHF ;
- $k(x)$ l'aire du carré AEFG.

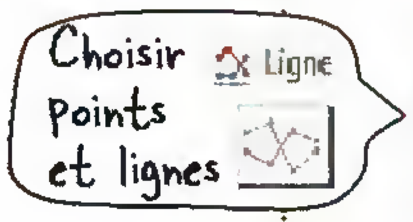


Ellsworth Kelly, *Red, Yellow, Blue I*, 1963, huile sur toile, 231 cm × 231 cm, Fondation Maeght, St Paul de Vence.

a. Réaliser et compléter le tableau ci-dessous avec un tableur.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	0	2	4	6	8	10
2	$f(x)$						

Recommencer pour $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$.



b. Avec le tableur, représenter graphiquement ces tableaux.

c. Dans chacun des quatre cas, dire s'il s'agit ou non d'un tableau de proportionnalité.

d. Exprimer $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ en fonction de x.

Peut-on retrouver avec ces expressions, les réponses à la question **c.** ?

2 Reconnaître une fonction affine

a et b désignent deux nombres donnés.
Une **fonction affine** est une fonction qui à un nombre x associe le nombre $ax + b$.

$$x \xrightarrow{\times a} ax \xrightarrow{+b} ax + b$$

1. Dans chaque cas, dire si la fonction proposée est affine.

a. $f : x \mapsto 4x$ **b.** $g : x \mapsto 40$ **c.** $h : x \mapsto 40 - 4x$ **d.** $k : x \mapsto x^2$

2. a. Calculer $h(7)$, puis l'image de -9 par la fonction h.

b. Calculer l'antécédent de 32, puis l'antécédent de 50 par h.

c. À un segment de longueur 40 cm on enlève 4 segments de même longueur x (en cm). La longueur du segment restant est donc modélisée par la fonction : $x \mapsto 40 - 4x$.
Interpréter pour cette situation, lorsque cela est possible, les calculs effectués en **a.** et **b.**

Proportionnalité des accroissements

3 Conjecturer, puis démontrer B2i

On peut recommencer avec d'autres fonctions affines.

1. f est la fonction affine $x \mapsto 2x + 3$.

a. Recopier et compléter ce tableau avec un tableur.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x_1	0	4	-2	5	-6	10	1	0,1
2	x_2	1	5	0	8	-3	5	-4	0,8
3	$f(x_1)$								
4	$f(x_2)$								
5	$x_2 - x_1$								
6	$f(x_2) - f(x_1)$								

b. Recopier et compléter : « Il semble que quels que soient les nombres x_1 et x_2, $f(x_2) - f(x_1) = \dots (x_2 - x_1)$ ».

2. f est la fonction affine $x \mapsto ax + b$ où a et b désignent deux nombres.
Recopier et compléter, puis énoncer la propriété démontrée : $f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (\dots) = \dots = a(\dots)$.

Représentation graphique d'une fonction affine

4 Découvrir une propriété

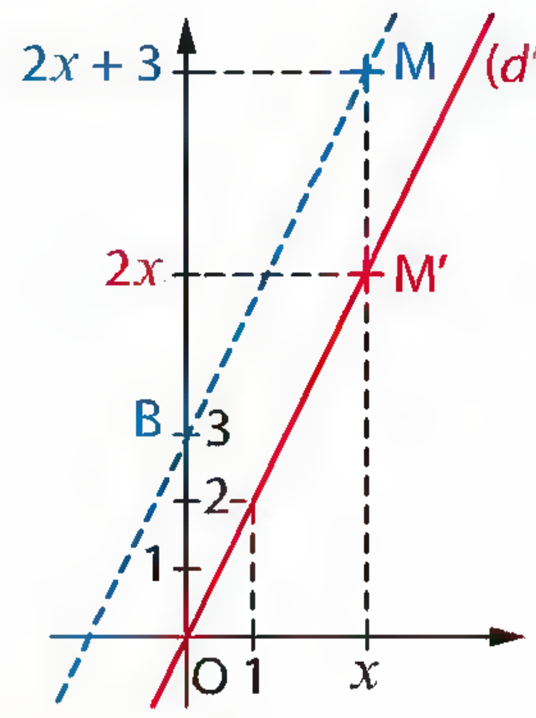
f est la fonction affine et g la fonction linéaire définies par $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = 2x$.

1. a. Dans un repère orthogonal d'origine O, tracer la droite (d') représentant la fonction linéaire g.

b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, puis placer les points P, B, C, D, E.

Que peut-on conjecturer pour ces points ?

Point	P	B	C	D	E
Abscisse x	–3	0	1	2,5	4
Ordonnée $2x + 3$					



2. On se propose de démontrer cette conjecture pour n'importe quel point M de coordonnées $(x\,;2x + 3)$.

On note M' le point de la droite (d') de coordonnées $(x\,;2x)$.

a. Pourquoi les droites (OB) et (MM') sont-elles parallèles ?

b. Calculer les distances OB et MM'.

c. En déduire la nature du quadrilatère non croisé OBMM'.

d. Que peut-on en déduire pour les droites (BM) et (d') ?

e. Conclure alors quant à la représentation graphique de la fonction f.

Info

- **De façon générale, on admet que, dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine $x \mapsto ax + b$ est une droite (d).**
- **Réciproquement, on admet qu'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.**

a est le coefficient directeur de (d).
b est l'ordonnée à l'origine de (d).

5 Tracer la droite représentant une fonction affine

1. Des élèves doivent tracer dans un repère, la droite (d) représentant la fonction affine f définie par $f(x) = 3x - 2$.

a. La méthode de Jeanne

Jeanne affirme : « Je commence par calculer les images de deux nombres pas trop proches l'un de l'autre. Par exemple, je calcule $f(0)$ et $f(3)$ ».

Faire ce que dit Jeanne, poursuivre son travail et tracer la droite (d).

b. La méthode de Farid

- Si l'on considère deux points de la droite (d) dont les abscisses diffèrent de 1, de combien diffèrent leurs ordonnées ? Pourquoi ?
- Farid déclare alors : « C'est intéressant ! En fait, je peux tracer la droite (d) en utilisant son ordonnée à l'origine puis son coefficient directeur ».

Tracer la droite (d) avec cette méthode.

2. g est la fonction affine définie par $g(x) = -3x + 1$.

Dans un repère, tracer la droite représentant g avec la méthode de Farid.

Cours

1 Fonctions affines

Définition Une **fonction affine** est une fonction qui à un nombre x associe le nombre $ax + b$ avec a et b nombres donnés.

Pour calculer l'image du nombre x par la fonction affine $x \mapsto ax + b$, on multiplie x par a, puis on ajoute b.

$$x \xrightarrow{\times a} ax \xrightarrow{+b} ax + b$$

Exemples

- $x \mapsto -3x + 7$ est une fonction affine avec $a = -3$ et $b = 7$.
- $x \mapsto \frac{1}{2}x - 5$ est une fonction affine avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = -5$.
- **Attention,** $x \mapsto 6x^2 - 1$ **n'est pas** une fonction affine, car c'est x^2, et non pas x, qui est multiplié par 6.

Cas particulier où $b = 0$
$x \mapsto ax$ est une fonction affine particulière : c'est une **fonction linéaire.**

Cas particulier où $a = 0$
$x \mapsto b$ est une fonction affine particulière : on dit que c'est une **fonction constante.**

2 Proportionnalité des accroissements

Propriété Pour toute fonction affine f : $x \mapsto ax + b$, les accroissements de x et de $f(x)$ sont proportionnels. Le coefficient de proportionnalité est a.
En d'autres termes, quels que soient les nombres x_1 et x_2 : $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$.

Démonstration : $f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = ax_2 + b - ax_1 - b$
$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1)$

Remarque : Dans cette propriété, le terme « accroissement » peut signifier augmentation mais peut aussi signifier diminution.

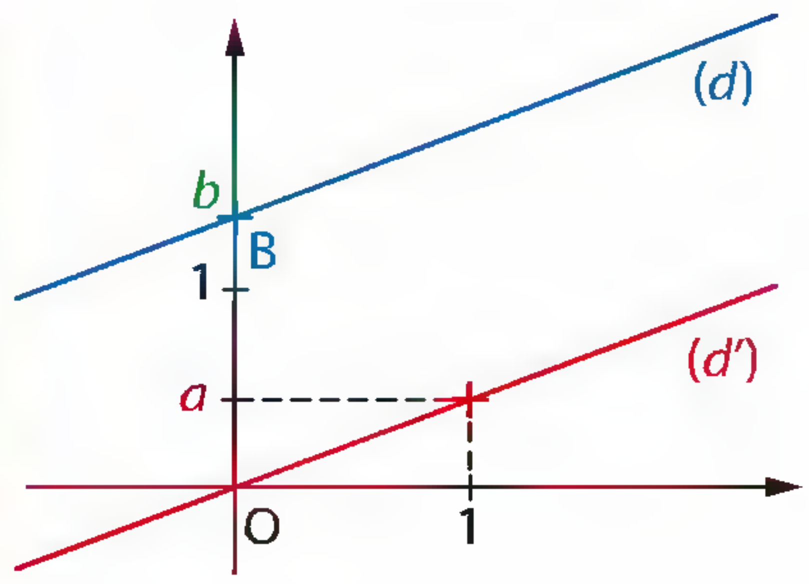
Exemple

f est la fonction affine $x \mapsto 3x - 1$.
Si x diminue de 4, c'est-à-dire si x passe de x_1 à x_2 avec $x_2 - x_1 = -4$,
alors $f(x)$ varie de $3 \times (-4)$ c'est-à-dire **diminue de 12.**
En effet, $f(x_2) - f(x_1) = 3(x_2 - x_1) = 3 \times (-4) = -12$.

3 Représentation graphique d'une fonction affine

a Fonction affine et droite

Propriétés • Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine $x \mapsto ax + b$ est constituée de tous les points de coordonnées $(x\,;ax + b)$. C'est **une droite** (d).
• Cette droite est **parallèle** à la droite (d') qui représente **la** fonction linéaire $x \mapsto ax$ et passe par le point B de coordonnées $(0\,;b)$.



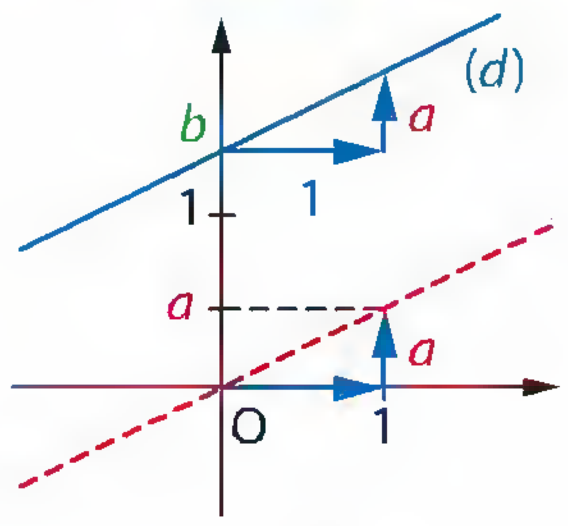
b Vocabulaire

Dans un repère, (d) est la droite représentant la fonction affine $x \mapsto ax + b$ et (d') la droite représentant la fonction linéaire $x \mapsto ax$. On dit que :

- a est le **coefficient directeur** de la droite (d) : c'est le même que celui de la droite (d'), cela traduit le fait que les droites (d) et (d') ont la même direction c'est-à-dire sont parallèles ;
- b est l'**ordonnée à l'origine** de la droite (d) : c'est l'ordonnée du point B d'abscisse nulle de (d).

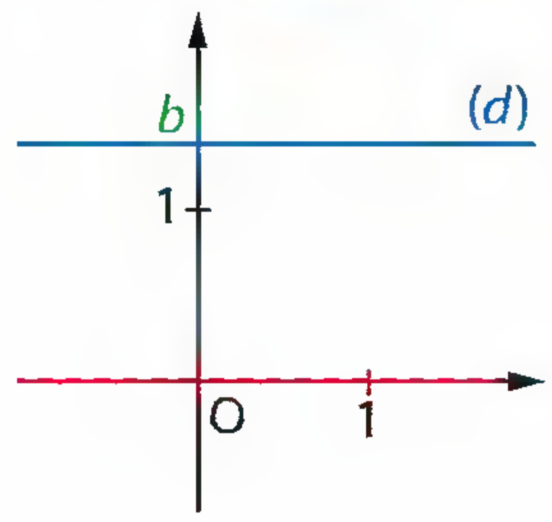
c Rôle du coefficient directeur

$a > 0$



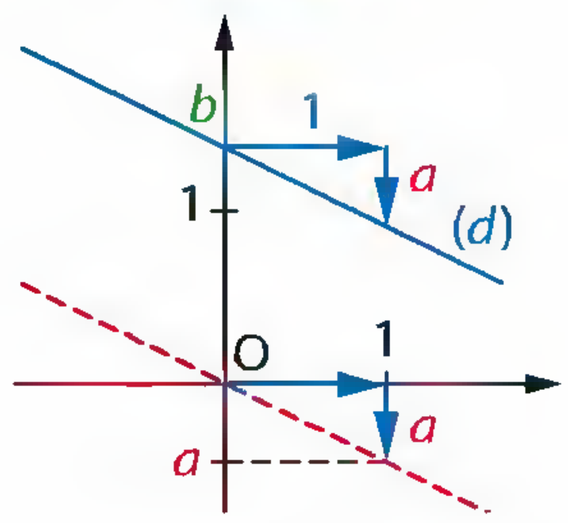
Lorsque le coefficient directeur est **positif**, la droite (d) « **monte** ».

$a = 0$



Lorsque $a = 0$, la droite (d) est **parallèle à l'axe des abscisses.**

$a < 0$



Lorsque le coefficient directeur est **négatif**, la droite (d) « **descend** ».

d Propriétés caractéristiques

Propriétés (admises) (d) est la droite qui représente la fonction affine $x \mapsto ax + b$, dans un repère.

- **Si** $y = ax + b$, **alors** le point M de coordonnées $(x\,;y)$ appartient à la droite (d).
- **Réciproquement**, **si** le point M $(x\,;y)$ appartient à la droite (d), **alors** $y = ax + b$.

Exemple

(d) est la droite qui représente la fonction affine $x \mapsto 4x - 1$ dans un repère.

- Pour $x = 5$, $y = 4 \times 5 - 1 = 19$. Donc le point P (5 ; 19) appartient à la droite (d).
- Le point Q(–1 ; –5) appartient-il à la droite (d) ? Oui, en effet, pour $x = -1$: $4x - 1 = 4(-1) - 1 = -5$.
- Le point R (2,25 ; 8,75) appartient-il à la droite (d) ? Non, en effet, pour $x = 2{,}25$:

  $4x - 1 = 4 \times 2{,}25 - 1 = 9 - 1 = 8$ et 8 est différent de 8,75, l'ordonnée du point R.

e Droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Propriété (admise) Dans un repère, une droite **non parallèle à l'axe des ordonnées** est la représentation graphique d'une fonction affine.

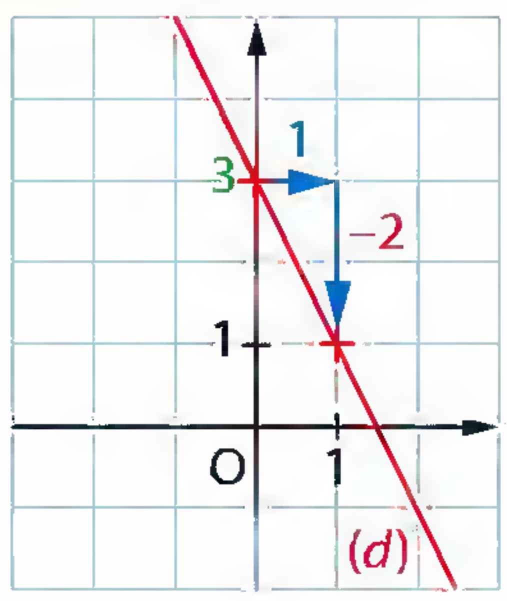
Exemple

La droite (d) ci-contre représente donc une fonction affine $x \mapsto ax + b$.

On lit sur le graphique que :

- l'ordonnée à l'origine de (d) est 3, donc $b = 3$.
- le coefficient directeur de (d) est –2, donc $a = -2$.

Ainsi, (d) représente la fonction affine $x \mapsto -2x + 3$.



Remarque : Une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'a pas de coefficient directeur.

Savoir-faire

1 Exercice résolu Calculer une image ou un antécédent

Animation interactive

f est la fonction affine définie par $f(x) = 3x - 5$.

a. Calculer l'image de -4.

b. Calculer l'antécédent de 2.

Solution

a. $f(-4) = 3 \times (-4) - 5 = -12 - 5 = -17$

L'image de -4 par f est -17.

> Calculer l'image de -4, c'est calculer $f(-4)$. Pour cela on remplace x par -4 dans l'expression $3x - 5$.

b. On cherche un nombre x tel que $f(x) = 2$ c'est-à-dire tel que successivement :

$$3x - 5 = 2$$
$$3x = 7$$
$$x = \frac{7}{3}$$

L'antécédent de 2 par f est $\frac{7}{3}$.

> Calculer l'antécédent de 2, c'est résoudre l'équation $f(x) = 2$ c'est-à-dire : $3x - 5 = 2$.

J'applique : exercices 4 à 7

2 Exercice résolu Représenter graphiquement

Animation interactive

Dans un repère, tracer la droite (d) qui représente la fonction affine $f : x \mapsto -0{,}5x + 1$.

Solution

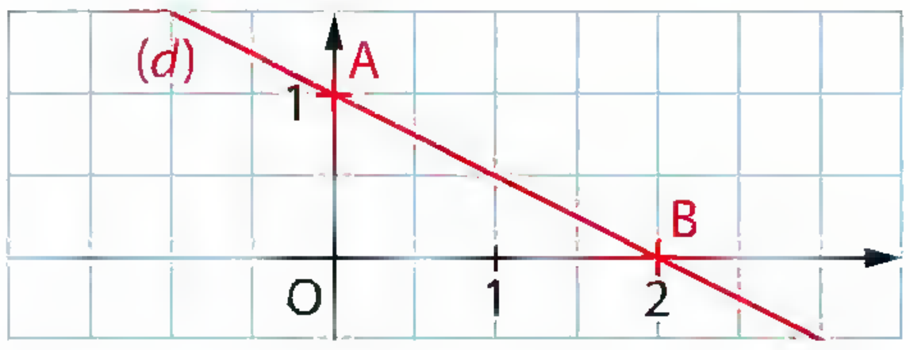
- **Avec deux points de (d)**

$f(0) = -0{,}5 \times 0 + 1 = 1$

$f(2) = -0{,}5 \times 2 + 1 = -1 + 1 = 0$

x	0	2
y	1	0

Donc la droite (d) passe par les points A(0 ; 1) et B(2 ; 0).

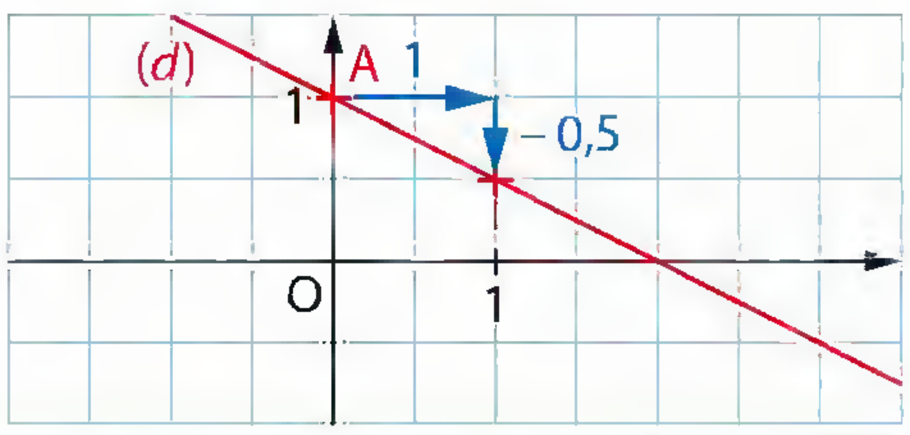


> **Méthode 1** Pour tracer la droite (d), on utilise deux points. Pour cela, on choisit deux valeurs de x pas trop proches l'une de l'autre. Ensuite, on calcule les images de ces deux nombres et on place les deux points correspondants.

- **Avec l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur**

$f(0) = -0{,}5 \times 0 + 1 = 1$, donc la droite (d) passe par le point A(0 ; 1). De plus, le coefficient directeur de (d) est $-0{,}5$.

> **Méthode 2** Pour tracer la droite (d), on utilise un point, en général celui d'abscisse 0, et le coefficient directeur de (d).



> D'après la proportionnalité des accroissements, lorsque l'abscisse x augmente de 1, l'ordonnée $f(x)$ varie de :
> $$-0{,}5 \times 1 = -0{,}5,$$
> donc diminue de 0,5.
> D'où le trajet bleu à partir de A, ci-contre.

J'applique : exercices 8 et 9

3 Exercice résolu Déterminer une fonction affine

Animation interactive

f est la fonction affine telle que $f(4) = 7$ et $f(-2) = -11$.
Déterminer l'expression de $f(x)$.

Solution

f est une fonction affine donc $f(x) = ax + b$.

1 La propriété de la proportionnalité des accroissements permet d'écrire :

$$f(4) - f(-2) = a(4 - (-2))$$

c'est-à-dire $7 - (-11) = a(4 + 2)$

$$18 = 6a$$

$$a = \frac{18}{6} = 3.$$

2 Ainsi $f(x) = 3x + b$.

3 $f(4) = 7$ se traduit par :

$$3 \times 4 + b = 7$$

c'est-à-dire $12 + b = 7$

$$b = -5.$$

4 En conclusion $f(x) = 3x - 5$.

Remarque : Une autre méthode est proposée à l'exercice 47 p. 143.

Déterminer l'expression de $f(x)$ revient à calculer les valeurs de a et de b telles que :

$$f(x) = ax + b$$

Méthode

1 On utilise la proportionnalité des accroissements pour calculer a.

2 On remplace a par la valeur trouvée, dans l'expression $f(x) = ax + b$.

3 On utilise l'une ou l'autre des deux images données dans l'énoncé pour calculer b.

4 On conclut en remplaçant a et b par les valeurs trouvées, dans $f(x) = ax + b$.

J'applique : exercices 10 et 11

J'applique

4 f est la fonction affine définie par $f(x) = -3x + 7$.
a. Calculer l'image de -2.
b. Calculer l'antécédent de 10.

5 g est la fonction affine définie par $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$.
Calculer :
a. l'image de -4
b. l'antécédent de 0
c. $g(8)$
c. le nombre qui a pour image 9

6 h est la fonction affine $x \mapsto 5 - 0{,}4x$.
a. Calculer l'image de -5.
b. Calculer l'antécédent de 1.

7 k est la fonction affine $x \mapsto 10x - 4$.
Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0	$-1{,}5$			$-8{,}5$	
$k(x)$			16	-2		-20

8 Dans un repère, tracer la droite (d) qui représente la fonction affine $f: x \mapsto 3x - 1$.

9 g est la fonction affine définie par $g(x) = 4x - 3$.
Dans un repère, tracer la droite (d) représentant la fonction g en utilisant l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur de (d).

10 Porter un regard critique f est la fonction affine telle que :

$$f(1) = 2 \text{ et } f(-5) = 2.$$

Sonia : « Inutile de faire des calculs, cette fonction f est constante ».
Augustin : « Pas du tout, f est une fonction linéaire ».
Qui a raison ?

11 g est la fonction affine définie par :

$$g(0) = 4 \text{ et } g(-2) = 10.$$

Déterminer l'expression de $g(x)$.

Traiter un problème

Le jour du Brevet Au Brevet, les fonctions affines sont souvent utilisées dans les exercices proposés. La plupart du temps, il est demandé d'établir l'expression de $f(x)$. Cette expression est certainement donnée dans la suite de l'énoncé ; il ne faut donc pas oublier de lire la totalité de l'énoncé.

12 Exercice guidé D'après *DNB*

Les parents de Charlotte souhaitent l'inscrire dans le club d'équitation le plus proche de chez eux. Le club leur propose trois formules différentes :

- Formule A : 18 € la séance.
- Formule B : 165 € par carte de 10 séances.
- Formule C : Paiement d'une cotisation annuelle de 70 € plus 140 € par carte de 10 séances.

Partie 1

1. Vérifier que le coût pour 7 séances est de 126 € pour la formule A, 165 € pour la formule B et 210 € pour la formule C.

2. Calculer le coût de 20 séances pour ces trois formules.
Quelle est la formule la plus avantageuse dans ce cas ?

Partie 2

Charlotte désirant faire du cheval toute l'année, ses parents décident de comparer les formules B et C.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant sur votre copie. Aucune justification n'est demandée.

		1 carte	2 cartes	5 cartes
Prix	Formule B			
	Formule C			

2. Soit x le nombre de cartes de 10 séances achetées.

a. Exprimer en fonction de x le coût pour la famille si elle choisit la formule B.

b. Exprimer en fonction de x le coût pour la famille si elle choisit la formule C.

c. Résoudre l'inéquation $140x + 70 \leqslant 165x$.

d. À partir de combien de cartes achetées, la formule C devient-elle avantageuse ?

Partie 3

1. Dans un repère avec pour unités 2 cm pour une carte en abscisses et 2 cm pour 50 € en ordonnées, construire les représentations graphiques des fonctions f et g définies par :

$f : x \mapsto 165x$ (prix avec la formule B) ; $g : x \mapsto 140x + 70$ (prix avec la formule C).

2. Dans cette question, on fera apparaître les tracés utiles en pointillés.
Retrouver graphiquement le nombre de cartes à partir duquel la formule C devient avantageuse.

GUIDE **Partie 1**

1. Il faut indiquer sur la copie le détail de ses calculs pour trouver les montants indiqués dans l'énoncé.

Partie 2

2. c. Cette inéquation comporte les expressions trouvées aux **a** et **b**. Si tel n'est pas le cas, il faut revoir ses réponses.

Partie 3

2. Graphiquement, la formule C est plus avantageuse que la formule B lorsque la droite représentant g est **au-dessous** de la droite représentant f. Il faut lire alors, sur l'axe des abscisses, les valeurs de x correspondantes.

Réponses p. 311

Exercices à l'oral

Fonctions affines

13 **1.** f est la fonction définie par $f(x) = 2x + 3$.

a. Recopier et compléter le programme de calcul ci-contre.

$$x \xrightarrow{\dots} 2x \xrightarrow{\dots} 2x + 3$$

b. Compléter la phrase : « Pour calculer l'image d'un nombre par la fonction f, on … ce nombre par … puis on … ».

2. De façon analogue, pour chacune de ces fonctions affines, indiquer le programme de calcul et le traduire par une phrase.

• $g : x \mapsto x - 9$ • $h : x \mapsto 4 - 5x$ • $i : x \mapsto \frac{5}{2}x + 1$

14 Les fonctions ci-dessous sont de la forme $x \mapsto ax + b$. Donner dans chaque cas les valeurs de a et de b.

a. $x \mapsto x + 3$ **b.** $x \mapsto 3x - 2$ **c.** $x \mapsto 5 - x$

d. $x \mapsto 5x$ **e.** $x \mapsto \frac{x}{2} - 1$ **f.** $x \mapsto -11$

15 Porter un regard critique Hassan a trouvé une fonction linéaire, une fonction constante et deux fonctions affines non linéaires et non constantes parmi les fonctions ci-dessous. A-t-il raison ?

$f : x \mapsto 6x - 7$ $g : x \mapsto -2x$ $h : x \mapsto \frac{5 - 3x}{5}$ $k : x \mapsto -3$

16 Expliquer pourquoi la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 5$ n'est pas affine.

17 f est la fonction affine $x \mapsto -3x + 4$.

Que calcule-t-on lorsque l'on écrit :

a. $-3 \times (-1) + 4$? **b.** $-3x + 4 = 7$? **c.** $-3 \times 2 + 4$?

18 h est la fonction affine $x \mapsto 3x - 4$.

Dans chaque cas, indiquer la réponse exacte.

1. L'image du nombre 5 est … **a.** 31 **b.** 11 **c.** 3

2. L'image du nombre 1 est … **a.** -1 **b.** 0 **c.** 1

3. L'antécédent du nombre 0 est … **a.** -4 **b.** 1,3 **c.** $\frac{4}{3}$

4. L'antécédent du nombre 5 est … **a.** -3 **b.** 3 **c.** $\frac{-1}{3}$

19 Emma a trouvé cette offre sur un site de e-commerce.

1. Exprimer le prix $p(n)$ à payer pour n CD-R commandés.

2. a. Calculer :

• $p(400)$; • le nombre n tel que $p(n) = 15$.

b. Que signifient ces résultats pour Emma ?

Proportionnalité des accroissements

20 f est la fonction affine $x \mapsto 4x - \frac{2}{3}$.

1. Alexis a mis une seconde pour calculer $f(13) - f(12)$. Comment a-t-il fait ?

2. Calculer le plus rapidement possible :

a. $f(11) - f(9)$ **b.** $f(2\,013) - f(2\,014)$ **c.** $f(5) - f(-5)$

21 **1.** g est la fonction affine $x \mapsto 2x - 3$.

De combien varie $g(x)$ lorsque :

a. x augmente de 3 **b.** x diminue de 5

2. Reprendre la question **1.** pour la fonction $x \mapsto -3x - 1$.

SOCLE **22** Porter un regard critique Hugo : « Je suis content d'avoir pris une carte de fidélité dans le cinéma à côté de chez moi. Ainsi je ne paie que 22 € pour 3 places ou 30 € pour 5 places ».

Théo : « Impossible ! 22 n'est pas divisible par 3 ».

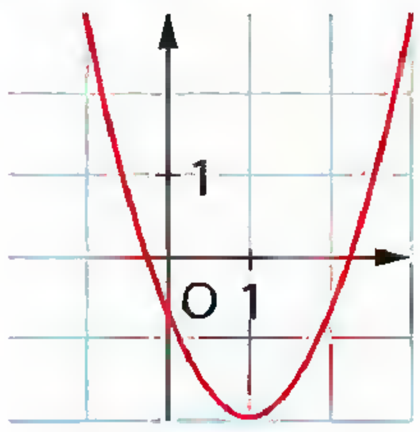
Hugo : « Tu as oublié le prix de ma carte ».

En s'insérant dans ce débat, trouver combien Hugo paie chaque place ainsi que le coût de sa carte de fidélité.

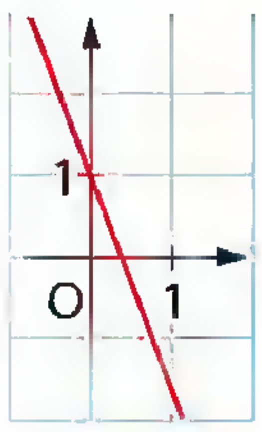
Représentation graphique

23 Lequel de ces graphiques peut représenter une fonction affine ?

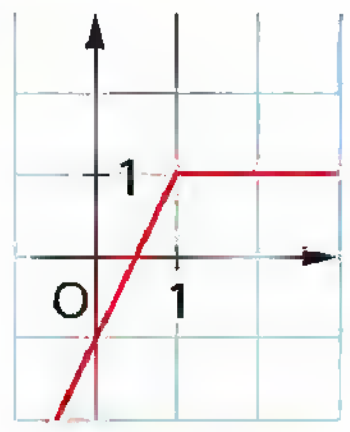
a.



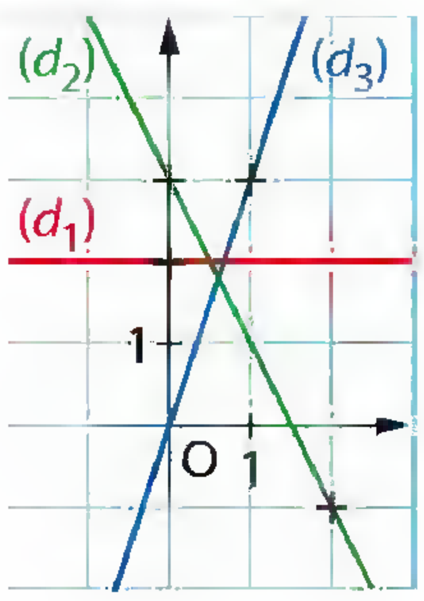
b.



c.



24 Dans ce repère, les droites (d_1), (d_2), (d_3) représentent respectivement les fonctions affines f_1, f_2, f_3.



1. Parmi ces fonctions, laquelle est linéaire ? constante ?

2. Par chaque fonction, donner :

a. l'image de 1 ;

b. si possible, l'antécédent de 3.

25 Porter un regard critique Dans un repère, la droite (d) représente la fonction affine $x \mapsto 5x - 1$.

Dans chaque cas, dire si l'affirmation est exacte.

a. A$(2\,;9) \in (d)$ **b.** B$(-1\,;4) \in (d)$ **c.** C$(0{,}2\,;0) \in (d)$

d. Le coefficient directeur de (d) est 5.

e. L'ordonnée à l'origine de (d) est 1.

Exercices d'application

Fonctions affines

26 Parmi les expressions ci-dessous, trouver celle qui correspond au schéma.

$$x \xrightarrow{\times 3} \ldots \xrightarrow{-4} \ldots$$

$f_1(x) = 3x + 4$ $\qquad f_2(x) = 3x^2 - 4$ $\qquad f_3(x) = -4 + 3x$

27 Pour chaque programme de calcul ci-dessous :
a. déterminer l'expression de l'image d'un nombre x ;
b. dire si l'on peut lui associer une fonction affine. Si oui, préciser si de plus la fonction est linéaire ou constante.

P_1
- Choisir un nombre.
- Élever au carré.
- Ajouter 1.

P_2
- Choisir un nombre.
- Diviser par 3.
- Soustraire 8.

P_3
- Choisir un nombre.
- Ajouter 6.
- Diviser par 2.
- Soustraire 3.

P_4
- Choisir un nombre.
- Soustraire 3.
- Multiplier par 2.
- Soustraire le double du nombre choisi.

28 Chaque fonction ci-dessous est affine, de la forme $x \mapsto ax + b$.
Donner dans chaque cas les valeurs de a et de b.

a. $x \mapsto 2x - 7$ $\qquad$ **b.** $x \mapsto 1 - 3x$ $\qquad$ **c.** $x \mapsto 5$
d. $x \mapsto \frac{x}{4}$ $\qquad$ **e.** $x \mapsto 5(x - 1)$ $\qquad$ **f.** $x \mapsto \frac{-2x+15}{3}$

29 **1.** f est la fonction affine $x \mapsto 5x - 4$.
Déterminer :
a. l'image de 3 $\qquad$ **b.** l'antécédent de -1 $\qquad$ **c.** $f(-2)$
2. g est la fonction affine définie par $g(x) = 2{,}5x - 1$.
Déterminer :
a. l'image de -2 $\qquad$ **b.** l'antécédent de $-3{,}5$ $\qquad$ **c.** $g(0)$

30 **B2i** **a.** f est la fonction affine qui à x associe $-2x + 6$. Avec un tableur, réaliser cette feuille de calcul.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-2,4	-1,5	-0,6	2,4	3,7	4,55	11,3
2	$f(x)$							

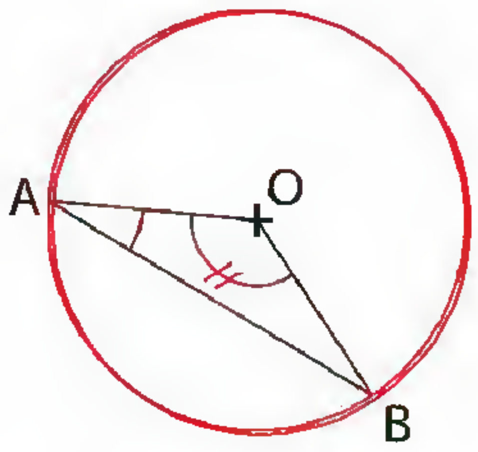
Quelle formule doit-on saisir dans la cellule B2 ?
Étendre cette formule jusqu'à la cellule H2.

b. Porter un regard critique Marion affirme : « La fonction g qui permet de passer de la ligne 2 à la ligne 1 du tableau est définie par $g(x) = -\frac{1}{2}x - 6$ ». A-t-elle raison ?

31 Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0	–5			1	
$0{,}4x - 4$			0	–5		–2

32 A et B appartiennent au cercle de centre O. On note x la mesure de l'angle $\widehat{OAB}$.



1. Antoine : « La mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ est $m(x) = 180 - 2x$ ».
Est-ce exact ? Justifier.
2. a. Calculer :
- l'image de 15 par m
- l'antécédent de 60 par m

b. Que signifient ces résultats pour la situation ?

33 **Math et métier**

Voici le devis établi par un couvreur-zingueur pour refaire la toiture en tuiles d'une maison.

Objet	Montant TTC
Location échafaudage, démontage toiture	900 €
Pose toiture (matériaux & main-d'œuvre inclus)	40 €/m²

1. Exprimer le coût $C(x)$ pour refaire une toiture de x m².
2. a. Calculer : • $C(120)$ • l'antécédent de 4 500
b. Que signifient ces résultats pour la situation ?

Un métier **Couvreur**

Travailleur de plein air, le couvreur pose sur les toits l'isolation et un revêtement étanche (tuile, ardoise, zinc, bois, tôle) constituant la couverture. Il l'entretient et la répare, par tous les temps.
Les formations : CAP, suivi d'une mention complémentaire Zinguerie, BP et BTS (après un bac STI2D).

http://www.meformer.org/recherche/metier

Proportionnalité des accroissements

SOCLE

34 **Connaître le Monde**

Au Québec, lors de la cueillette des pommes, un étudiant reçoit un salaire de 50 \$ par jour, auquel s'ajoute 0,02 \$ par kilogramme de pommes cueillies.
a. S'il cueille mardi 240 kg de pommes de plus que lundi, combien gagne-t-il en plus ?
b. S'il cueille mercredi 50 kg de pommes de moins que lundi, combien gagne-t-il en moins ?

35 f est la fonction affine telle que $f(5) = 13$ et $f(2) = 7$.

a. Calculer $f(5) - f(2)$.

b. On note $f(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres.

- Exprimer $f(5) - f(2)$ à l'aide de a.
- En déduire la valeur de a, puis de b.

36 f est une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
Dans chaque cas, calculer la valeur de a, puis de b.

a. $f(10) = 3$ et $f(2) = 5$ **b.** $f(-1) = 5$ et $f(5) = 3$

37 Porter un regard critique **1.** g est la fonction affine définie par $g(x) = -2x + b$ et telle que $g(3) = 5$.
Voici ce qu'écrit Léo pour calculer $g(4)$ sans déterminer le nombre b.

$g(4) - g(3) = -2(4 - 3)$ d'où $g(4) - 5 = -2$

Est-ce exact ? Si non, corriger l'erreur. En déduire $g(4)$.

2. De même, sans déterminer b, calculer :

a. $g(2)$ **b.** $g(7)$ **c.** $g(1)$ **d.** $g(-3)$

38 **1.** g est une fonction affine dont on sait que :
« Si x augmente de 6, alors son image augmente de 3 ».
De combien varie $g(x)$ lorsque :

a. x augmente de 3 ? **b.** x diminue de 4 ?

2. Reprendre la question **1.** pour une fonction affine telle que : « Si x augmente de 2, alors son image diminue de 10 ».

39 Porter un regard critique f est une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ et telle que $f(3) = -1$ et $f(-2) = 4$.

a. Maxime affirme : « En calculant $f(3) - f(-2)$, je pourrai obtenir la valeur de a. Je vous la donne tout de suite ».
Fleur : « Alors moi, je vais calculer b à partir de $f(-2) = 4$ ».
Jordy : « Moi, je préfère prendre $f(3) = -1$ ».
Que pensez-vous de cet échange ?

b. Effectuer les calculs et trouver l'expression de $f(x)$.

Pour les exercices 40 à 43, f est une fonction affine. Déterminer l'expression de $f(x)$.

40 $f(1) = 1$ et $f(3) = -3$ **41** $f(2) = 3$ et $f(4) = 1$

42 $f(5) = -2$ et $f(8) = -2$ **43** $f(4) = 3$ et $f(-2) = 1$

44 f est une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
On sait que : **(1)** $f(0) = 5$ **(2)** $f(5) - f(3) = 8$

a. Traduire à l'aide de a ou b chacune des égalités **(1)** et **(2)**.

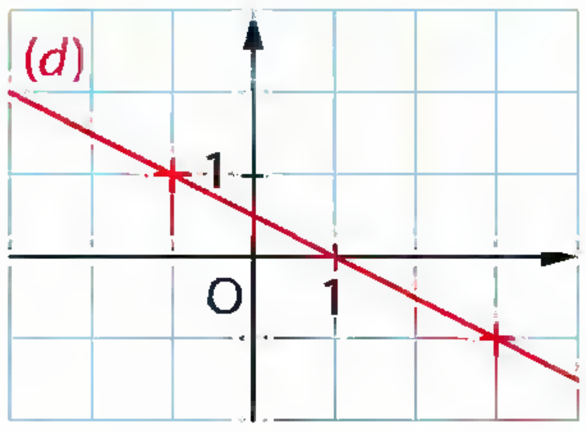
b. En déduire l'expression de $f(x)$.

Représentation graphique

45 La droite (d) ci-contre représente une fonction affine f.

a. Lire l'image de 3 par f.

b. Lire le nombre qui a pour image 1 par f.



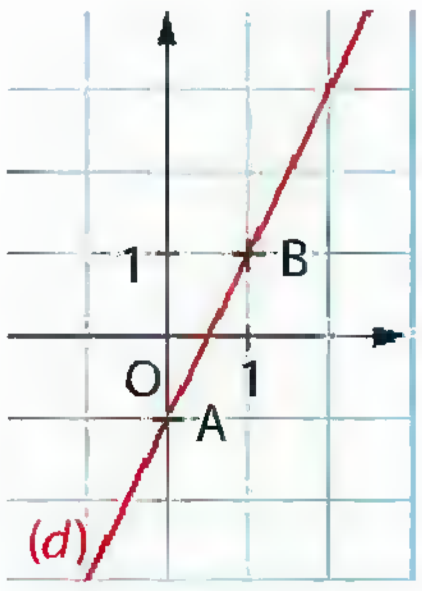
46 Dans ce repère, la droite (d) représente une fonction affine f.

a. Lire l'ordonnée à l'origine de (d).

b. En utilisant les points A et B de (d), lire le coefficient directeur de (d).

c. Déterminer l'expression de $f(x)$.

d. Calculer l'image de 2 et vérifier la cohérence avec une lecture graphique.



47 **a.** Placer dans un repère les points A (2 ; 5) et B (3 ; –4). Tracer la droite (AB).

b. En utilisant les points A et B, lire le coefficient directeur de la droite (AB).

c. Cette droite (AB) représente une fonction affine f. Déterminer l'expression de $f(x)$.

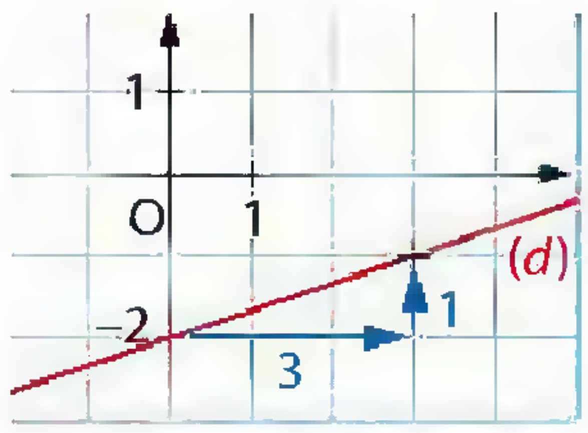
48 Dans un repère, représenter graphiquement chaque fonction affine en plaçant deux points.

a. $f: x \mapsto -x + 4$ **b.** $g: x \mapsto 2x - 3$

49 Dans un repère, représenter graphiquement chaque fonction affine en utilisant un point et le coefficient directeur.

a. $f: x \mapsto 3x - 2$ **b.** $g: x \mapsto -2x - 7$

50 **1.** h est la fonction affine définie par $h(x) = \frac{1}{3}x - 2$.
Expliquer comment Anne trace la droite (d) qui représente la fonction h. Justifier.



2. Dans chaque cas, utiliser la méthode d'Anne pour tracer la droite représentant la fonction affine.

a. $f: x \mapsto -\frac{2}{3}x + 5$ **b.** $g: x \mapsto \frac{3}{4}x - 3$

Pour les exercices 51 et 52, tracer, dans un repère, les droites qui représentent les deux fonctions affines.

51 $f: x \mapsto 3x + 2$ et $g: x \mapsto 3x - 4$

52 $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x + 3$ et $g: x \mapsto 3 + 2x$

Exercices

53 Porter un regard critique Dans un repère, (d) est la droite qui représente la fonction affine définie par :

$$f(x) = -2x + 3.$$

a. Tracer la droite (d).

b. Placer les points $A\left(-\frac{1}{2} ; 4\right)$ et $B\left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

A et B appartiennent-ils à la droite (d) ? Justifier.

c. Allan affirme : « Le point C (1 243,25 ; – 2 483,5) appartient à la droite (d) ».

A-t-il raison ?

54 Dans un même repère, (d) et (d') sont les droites qui représentent les fonctions affines f et g définies par :

$$f(x) = 2x - 7 \quad \text{et} \quad g(x) = -3x + 3.$$

a. Tracer les droites (d) et (d').

b. Lire les coordonnées de leur point d'intersection.

c. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

Pouvait-on prévoir le résultat ?

55 On considère deux fonctions affines :

$$f : x \mapsto \frac{4}{3}x - 3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto -x + 6$$

a. Tracer les représentations graphiques de f et de g dans un même repère.

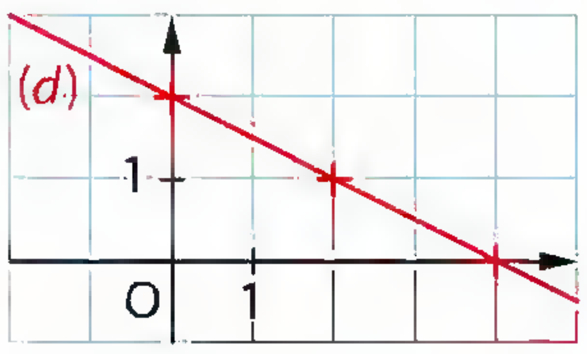
b. Lire une valeur approchée des coordonnées de leur point d'intersection K.

c. Déterminer par le calcul les coordonnées de K.

D'après *DNB*

Prendre des initiatives

56 La droite (d) représente une fonction affine f dans un repère. Déterminer l'expression de $f(x)$.



57 Dans un repère, (d) est la droite qui représente la fonction affine f définie par $f(x) = \frac{5}{7}x - 2$.

a. Pour tracer la droite (d), Coralie calcule $f(0)$ et $f(3)$. Quelle difficulté va-t-elle rencontrer ?

b. Quelle autre valeur de x a-t-elle intérêt à choisir ?

c. Tracer la droite (d).

58 **Travail de groupe**

1. Échanger au sein du groupe.

La famille Durand prend la route. Ils roulent pendant 2 h à la vitesse moyenne de 80 km/h, font une pause de 30 min, puis roulent pendant 1 h à la vitesse moyenne de 100 km/h.

a. Représenter graphiquement :
- la durée du trajet en fonction de la distance parcourue ;
- la distance parcourue en fonction de la durée.

b. Un de ces graphiques ne permet pas de définir une fonction. Lequel ? Expliquer.

2. Confronter les différentes réalisations et réponses.

Vrai ou faux ?

Pour les exercices 59 à 62, dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Expliquer la réponse.

59 Il n'existe pas de fonction affine vérifiant :

$$f(6) = f(7) = 1.$$

60 Les fonctions ci-dessous sont toutes affines.

- $x \mapsto x\sqrt{2} - 1$ • $x \mapsto 2{,}5x$ • $x \mapsto \pi$

61 f est la fonction affine $x \mapsto 4x - 6$.

L'antécédent de 2 est aussi l'image de 2.

62 Dans un repère, les représentations graphiques des fonctions affines $x \mapsto -2x - 5$ et $x \mapsto -2x + 3$ sont deux droites parallèles.

Calcul mental et réfléchi

63 **Images**

f est la fonction affine définie par $f(x) = 4x - 9$.

Calculer mentalement l'image du nombre :

a. 0 **b.** –1 **c.** –0,5 **d.** $\frac{3}{4}$ **e.** $-\frac{5}{2}$ **f.** $\sqrt{3}$

64 **Antécédents**

g est la fonction affine $x \mapsto -2x + 5$.

Déterminer mentalement l'antécédent du nombre :

a. 5 **b.** 0 **c.** –5 **d.** 1 **e.** 6 **f.** –3

65 **Proportionnalité des accroissements**

f est une fonction affine de la forme $x \mapsto ax + b$.

Dans chaque cas, déterminer a mentalement.

a. $f(2) - f(0) = 6$ **b.** $f(1) = f(-3)$ **c.** $f(2) - f(-5) = 14$

66 **Détermination d'une fonction affine**

f est une fonction affine de la forme $x \mapsto ax + b$.

Elle est représentée dans un repère par la droite qui coupe l'axe des ordonnées au point A (0 ; – 2) et qui passe par le point B (6 ; 0). Déterminer mentalement l'expression de $f(x)$.

Présenter, argumenter, communiquer

67 Soigner la rédaction

Énoncé. f est la fonction affine $x \mapsto -3x + 2$.
Calculer : **a.** l'image de -4 **b.** l'antécédent de 71

Voici ce qu'a écrit Sophie et les annotations de son professeur. Réécrire correctement la solution.

a. $\cancel{f}$: $-3 \times (-4) = 12 \cancel{+} 2 = 14$
b. $f(x) = 71$ donc $\cancel{f(x)} = 71 - 2 = 69 \cancel{:} -3 = \underline{-23}$
Les résultats sont justes mais les signes = sont très mal employés. De plus il faut penser à conclure.

68 Qui a raison ?

Voici un tableau de valeurs d'une fonction f.

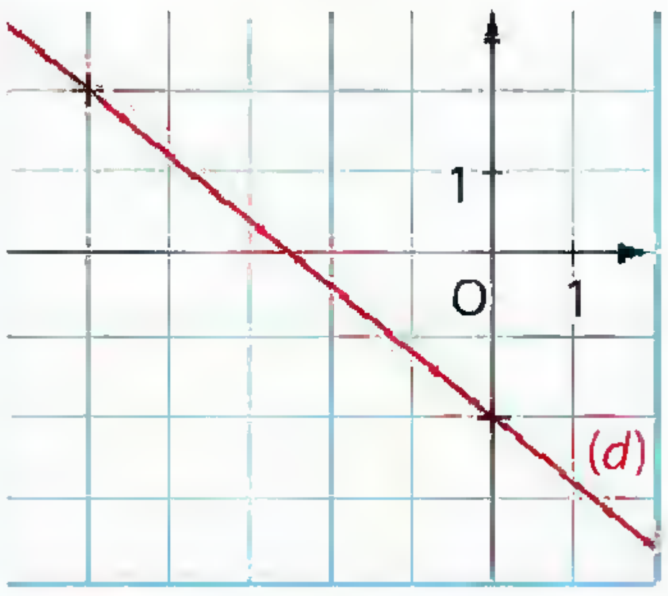
x	0	1	4	10
$f(x)$	3	5	11	23

Paul : « La fonction f ne peut pas être affine ».
Lucie : « Si ! elle peut l'être ! »
Qui a raison ? Expliquer.

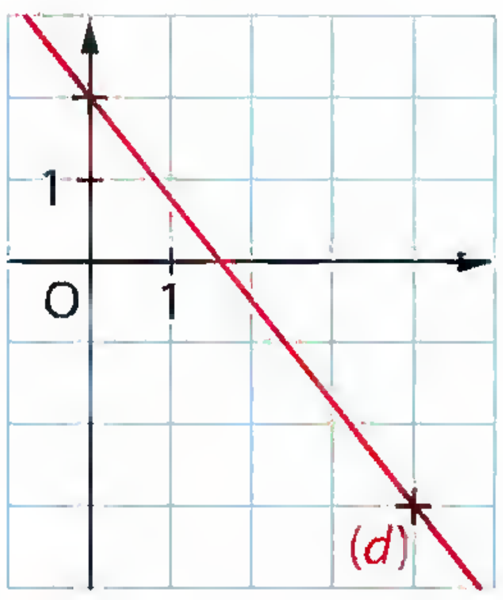
69 Porter un regard critique

f est la fonction affine $x \mapsto -\frac{4}{5}x + 2$.
Deux élèves ont tracé, dans un repère, la droite qui représente f. Mais chacun s'est trompé. Dire pourquoi.

Lola



Fred



70 Manifester sa compréhension

x et y désignent deux nombres strictement positifs.
Un rectangle de dimensions x et y (en cm) a pour périmètre 30 cm.
a. Exprimer y en fonction de x.
b. Pierre : « La fonction qui associe à la dimension x l'autre dimension y est affine ».
Cindy : « Elle peut même être linéaire ».
Dire si l'un ou l'autre a raison. Justifier.

71 Utiliser la recherche d'un élève

f est une fonction affine telle que $f(0) = 0$.
Compléter cette copie et conclure sur la nature de f.

f est une fonction affine donc $f(x) = ax + b$.
$f(0) = 0$ donc $a \times 0 + b = 0$.

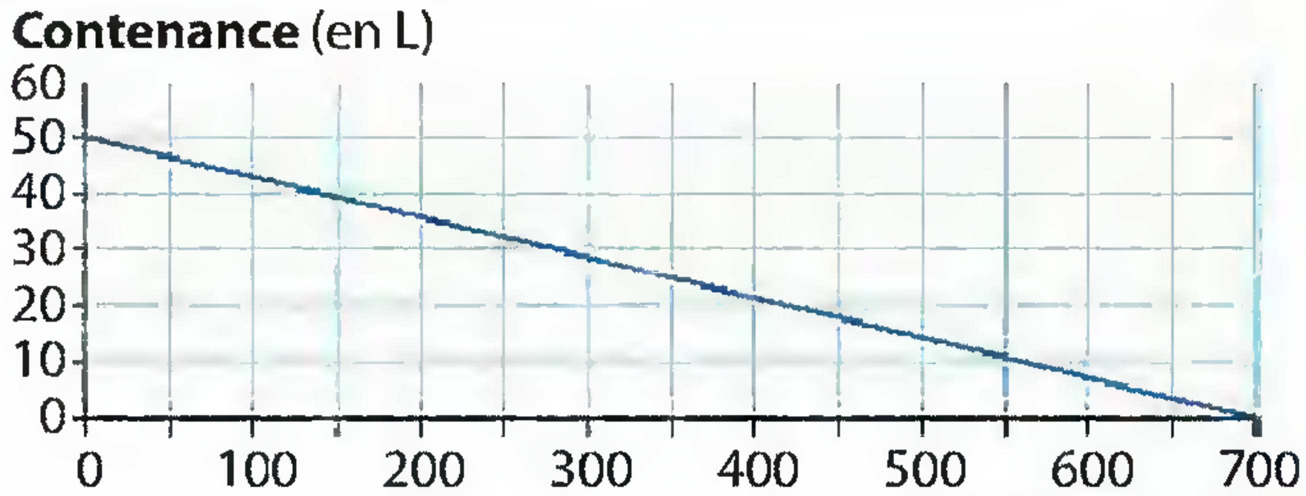
72 Traduire des informations

1. Dans chaque cas, exprimer en fonction de n :
a. le coût $f(n)$ de location d'un vélo pour n jours, au tarif de 15 € la journée ;
b. le prix $g(n)$ à payer pour n minutes de communication avec un forfait « appels illimités » de 30 € ;
c. la somme $h(n)$ qu'il reste à Mathieu sur ses 50 €, après un achat de n livres à 12 € l'un.

2. **Porter un regard critique** Noé affirme : « Toutes ces fonctions sont affines ; il y a même des cas particuliers ».
A-t-il raison ?

SOCLE 73 Lire un graphique

Le graphique ci-dessous représente les variations de la contenance (en L) du réservoir de la voiture de Max en fonction de la distance parcourue (en km).

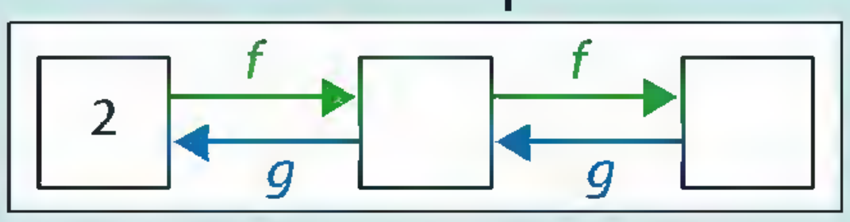


1. Pour chaque question, rédiger une ou deux phrases expliquant comment lire la réponse sur le graphique.
a. Quelle était la contenance du réservoir au départ ?
b. Quelle distance Max a-t-il parcourue lorsqu'il lui reste 20 L d'essence dans son réservoir ? Même question quand il lui reste 10 L.
c. Quelle est la quantité d'essence utilisée après 200 km ?
2. Pour chacune des questions ci-dessus, donner la réponse avec la précision permise par le graphique.

74 Narration de recherche

Racontez vos pistes de recherche, qu'elles vous aient permis de trouver ou non.
Relevez celles qui vous ont fait progresser ou changer de méthode.

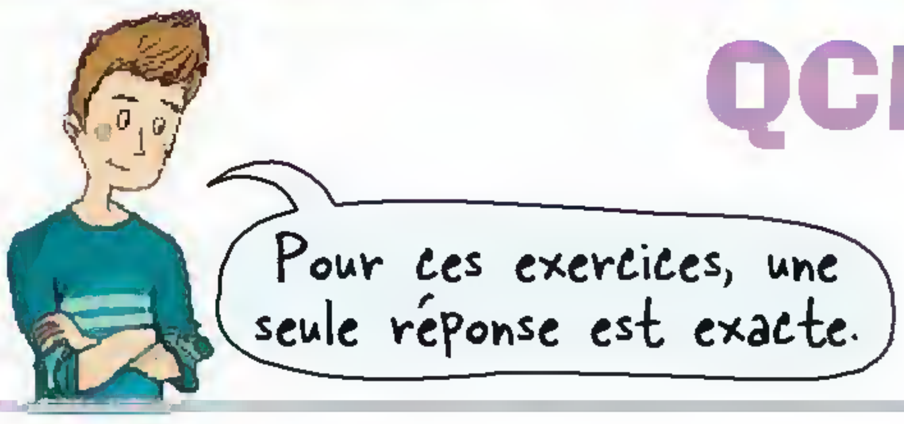
f est la fonction affine qui à x associe $-2x + 5$.
g est une fonction affine telle que :

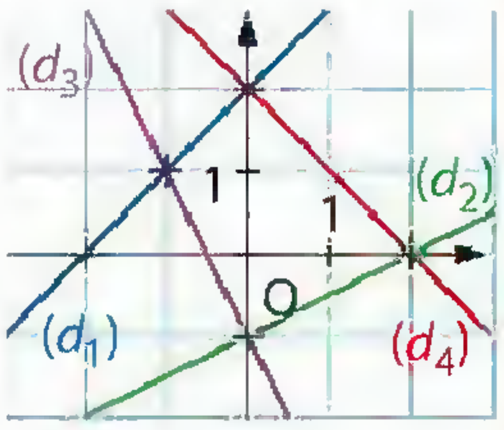


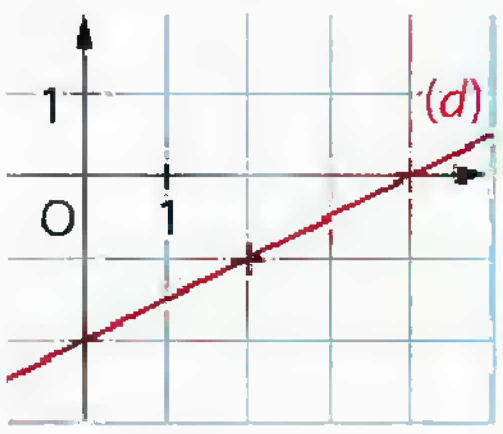
a. Recopier et compléter ce schéma.
b. Déterminer l'expression de $g(x)$.

QCM pour s'évaluer

QCM interactif



	a	b	c	Si la réponse est fausse revoir :
75 Parmi ces fonctions, celle qui est une fonction affine est …	$x \mapsto 3x^2 - 1$	$x \mapsto \frac{2}{3} - x$	$x \mapsto \frac{4}{x} - 3$	§ 1. du cours p. 194
76 L'image du nombre -5 par la fonction affine $x \mapsto -4x + 7$ est …	-13	27	3	exercice résolu 1 p. 196
77 f est la fonction affine $x \mapsto 3x - 4$. L'antécédent du nombre 3 est …	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	exercice résolu 1 p. 196
78 f est la fonction affine définie par $f(x) = 4x + 5$. Alors …	$f(2) - f(5) = -12$	$f(2) - f(5) = -15$	on ne peut pas calculer $f(2) - f(5)$	§ 2. du cours p. 194
79 g est la fonction affine $x \mapsto -3x + 7$. Alors, si x augmente de 2, $g(x)$ …	augmente de 7	diminue de 3	diminue de 6	§ 2. du cours p. 194
80 f est une fonction affine $x \mapsto ax + b$ telle que $f(8) - f(1) = 14$. Alors …	$a = 0{,}5$	$a = 2$	$a = -2$	exercice résolu 3 p. 197
81 f est une fonction affine $x \mapsto ax + b$ telle que $f(-2) = 4$ et $f(8) = -1$. Alors …	$a = -2$ et $b = 0$	$a = 0{,}5$ et $b = 5$	$a = -0{,}5$ et $b = 3$	exercice résolu 3 p. 197
82 Sur cette figure, les fonctions affines $f : x \mapsto 0{,}5x - 1$ et $g : x \mapsto -x + 2$ sont représentées par les droites … 	(d_2) et (d_4)	(d_1) et (d_2)	(d_1) et (d_4)	exercice résolu 2 p. 196
83 Sur la figure ci-dessus, la droite (d_3) représente la fonction affine f qui à x associe …	$-x - 1$	$x + 1$	$-2x - 1$	§ 3. e. du cours p. 195

	a	b	c	Si la réponse est fausse revoir :
84 La droite (d) ci-contre représente une fonction affine f. Alors … 	l'antécédent de 0 est 4	l'antécédent de -1 est 2	l'image de 0 est -2	exercice résolu 2 p. 196
85 Pour la droite (d) ci-dessus …	le coefficient directeur est 2	le coefficient directeur est 0,5	l'ordonnée à l'origine est -2	§ 3. e. du cours p. 195
86 La droite (d) ci-dessus représente la fonction affine f telle que …	$x \mapsto 0{,}5x - 2$	$x \mapsto -2x + 0{,}5$	$f(x) = \frac{x-4}{2}$	§ 3. e. du cours p. 195

Mon score
- Plus de la moitié des réponses justes
- Plus de la moitié des réponses fausses

Réponses page 311