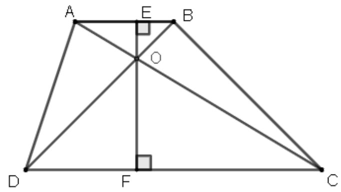
Exercice 1 On a $(AC)\,et\,(BD)$ se coupent en O et $(AB)\,et\,(CD)$ parallèles, donc d'après le théorème de Thales.



$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$$

Donc $$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{c}{a} \quad (1)$$

On a $(AC)\,et\,(EF)$ se coupent en O et $(AE)\,et\,(FC)$ parallèles, donc d'après le théorème de Thales.

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OE}{OF}=\frac{AE}{FC} \quad (2)$$

De $(1)\,et\,(2)$ on conclut : $$\frac{OE}{OF}=\frac{c}{a}$$

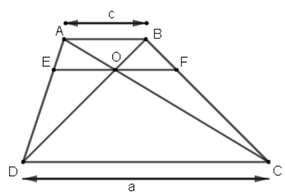
Or $OF=h-OE$ donc $$\frac{OE}{h-OE}=\frac{c}{a}$$

$c(h-OE)=a\times OE$ d'où $$OE=\frac{ch}{a+c}$$

De même : $OE=h-OF$ donc $$\frac{h-OF}{OF}=\frac{c}{a}$$

$a(h-OF)=c\times OF$ d'où $$OF=\frac{ah}{a+c}$$

Exercice 2 On a $(AC)\,et\,(BD)$ se coupent en O et $(AB)\,et\,(CD)$ parallèles, donc d'après le théorème de Thales.



$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$$

Donc $$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{c}{a} \quad (1)$$

D'où $$OC=\frac{a}{c}\times OA \quad et \quad OD=\frac{a}{c}\times OB$$

On a (DA) et (DB) se coupent en D et (AB) et (OE) parallèles, donc d'après le Théorème de Thales. $\dfrac{DE}{DA}=\dfrac{DO}{DB}=\dfrac{EO}{AB}$ (2) c'est-à-dire $\dfrac{DO}{DB}=\dfrac{EO}{c}$ (2)

D'où $$EO=c\times\frac{DO}{DB}$$

On a (CA) et (CB) se coupent en C et (OF) et (AB) parallèles, donc d'après le Théorème de Thales. $\dfrac{CO}{CA}=\dfrac{CF}{CB}=\dfrac{OF}{AB}$ (3) c'est-à-dire $\dfrac{CO}{CA}=\dfrac{OF}{c}$ (3)

D'où $$OF=c\times\frac{CO}{CA}$$

On a : $$EF=EO+OF$$

$$EF=c\times\frac{DO}{DB}+c\times\frac{CO}{CA}$$

$$EF=c\times\left(\frac{DO}{DB}+\frac{CO}{CA}\right)$$

$$EF=c\times\left(\frac{DO}{DO+OB}+\frac{CO}{CO+OA}\right)$$

$$EF=c\times\left(\frac{\frac{a}{c}\times OB}{\frac{a}{c}\times OB+OB}+\frac{\frac{a}{c}\times OA}{\frac{a}{c}\times OA+OA}\right)$$

$$EF=c\times\left(\frac{\frac{a}{c}\times OB}{\left(\frac{a}{c}+1\right)OB}+\frac{\frac{a}{c}\times OA}{\left(\frac{a}{c}+1\right)OA}\right)$$

$$EF=c\times\left(\frac{\frac{a}{c}}{\left(\frac{a}{c}+1\right)}+\frac{\frac{a}{c}}{\left(\frac{a}{c}+1\right)}\right)$$

$$EF = c \times \left(\frac{2\frac{a}{c}}{\left(\frac{a}{c}+1\right)} \right) = \frac{2a}{\frac{a+c}{c}} = \frac{2ac}{a+c}$$

Exercice 3

1. soient : h_1 la hauteur du trapèze $CDEF$.

h_2 la hauteur du trapèze $ABFE$.

Alors : $S_1 = \frac{(b+c)\times h_1}{2}$ *et* $S_2 = \frac{(a+b)\times h_2}{2}$

Donc : $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{(b+c)\times h_1}{2}}{\frac{(a+b)\times h_2}{2}} = \frac{b+c}{a+b} \times \frac{h_1}{h_2}$

Dans le triangle rectangle CGF on a : $\tan\alpha = \frac{FG}{CG}$

Dans le triangle rectangle FHB on a : $\tan\beta = \frac{BH}{FH}$

D'une part : les angles $F\hat{C}G$ *et* $B\hat{F}H$ sont égaux puisqu'ils sont des angles correspondants définies par les parallèles (CG) *et* (FH) et la sécante (BC).

Donc : $\alpha = \beta$ et par suite $\tan\alpha = \tan\beta$

$$\frac{FG}{CG} = \frac{BH}{FH}$$

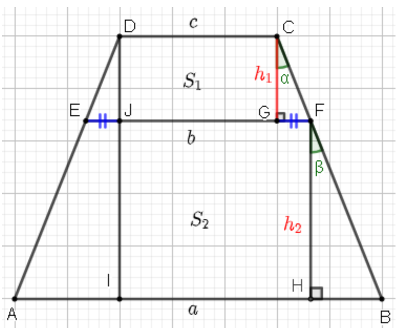
D'autre part : le trapèze $ABCD$ étant isocèle, alors $EJ = GF$.

On a : $EJ + JG + GF = b$ et $JG = c$

Alors : $2GF + c = b$

$$GF = \frac{b-c}{2}$$

De même : $BH = \frac{a-b}{2}$



On a alors : $\frac{FG}{CG} = \frac{BH}{FH}$

$$\frac{\frac{b-c}{2}}{h_1}=\frac{\frac{a-b}{2}}{h_2}$$

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{\frac{b-c}{2}}{\frac{a-b}{2}}=\frac{b-c}{a-b}$$

Par conséquent : $$\frac{S_1}{S_2}=\frac{b+c}{a+b}\times\frac{h_1}{h_2}$$

$$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{b+c}{a+b}\right)\times\left(\frac{b-c}{a-b}\right)$$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}$$

2. Si : $S_1=S_2$ *alors* $\frac{S_1}{S_2}=1$

$$\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}=1$$

$$a^2-b^2=b^2-c^2$$

$$\frac{a^2+c^2}{2}=b^2$$

$$b=\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$$