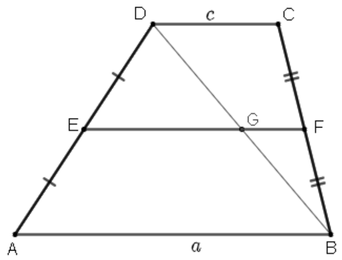
Exercice 1



La droite (EF) est axe de symétrie du trapèze $ABCD$,

elle est parallèle aux bases $[AB]$ et $[CD]$.

Dans le triangle ADB, la droite (EG) passe par le point E milieu

Du segment $[AD]$ et parallèle à (AB).

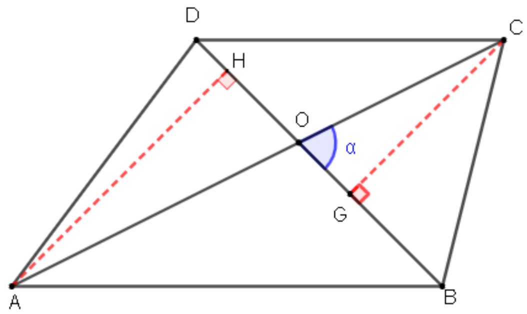
Donc le point G est le milieu du segment $[BD]$.

Par suite : $EG = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ et $GF = \frac{DC}{2} = \frac{c}{2}$

On a : $EF = EF + GF$

$$\boxed{EF = \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+c}{2}}$$

Exercice 2



Soit $[CG]$ la hauteur du triangle BCD

Et $[AH]$ la hauteur du triangle ABD.

On a : $\mathrm{A}_{ABCD} = \mathrm{A}_{BCD} + \mathrm{A}_{ABD}$

$$\mathrm{A}_{ABCD} = \frac{CG \times BD}{2} + \frac{AH \times BD}{2}$$

$$\mathrm{A}_{ABCD} = \frac{BD}{2}(CG + AH)$$

Les deux angles $[C\hat{O}G]$ et $[A\hat{O}H]$ sont opposes par le sommet, donc $C\hat{O}G = A\hat{O}H = \alpha$.

Dans le triangle rectangle COG on a : $\sin\alpha = \frac{CG}{OC}$ donc $CG = OC \times \sin\alpha$.

Dans le triangle rectangle AOH on a : $\sin\alpha = \frac{AH}{AO}$ donc $AH = AO \times \sin\alpha$

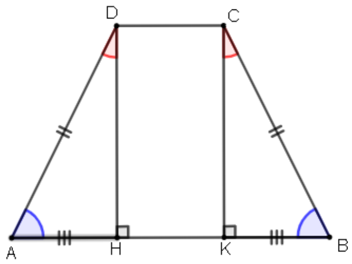
Par suite : $\mathrm{A}_{ABCD} = \frac{BD}{2}(OC \times \sin\alpha + AO \times \sin\alpha)$

$$\mathrm{A}_{ABCD} = \frac{BD \times \sin\alpha}{2}(OC + AO)$$

$$\mathrm{A}_{ABCD} = \frac{BD \times \sin\alpha}{2} \times AC$$

$$\boxed{\mathrm{A}_{ABCD} = \frac{1}{2} \times AC \times BD \times \sin\alpha}$$

Exercice 3



$ABCD$ est un trapèze, donc $(AB)//(CD)$

D'où : $(CD)//(HK)$

On a : $(DH)\perp(AB)$ *et* $(CK)\perp(AB)$ *donc* $(CK)//(DH)$

On conclut que le quadrilatère $CDHK$ est un rectangle.

D'où $HK = DC = c$

Puisque le trapèze $ABCD$ est isocèle, alors $D\hat{A}B = A\hat{B}C$.

Les triangles ADH *et* BKC sont tels que $D\hat{A}H = C\hat{B}K$ *et* $A\hat{H}D = B\hat{K}C$

Donc : $A\hat{D}H = B\hat{C}K$

Les triangles ADH *et* BKC sont alors semblables.

Puisque le trapèze $ABCD$ est isocèle, alors $AD = BC$.

Par suite les triangles ADH *et* BKC sont isométriques, d'où $AH = KB$

On a : $AH + HK + KB = AB$

$2AH + HK = AB$

$2AH + c = a$

$AH = \frac{a-c}{2}$ **D'où** $\boxed{AH = KB = \frac{a-c}{2}}$

Exercice 4

$ABCD$ est un trapèze isocèle, donc $OD = OC \quad et \quad OA = OB$

Par application du théorème de Pythagore dans les triangles rectangles

OCD ; AOB et BOC respectivement, on a.

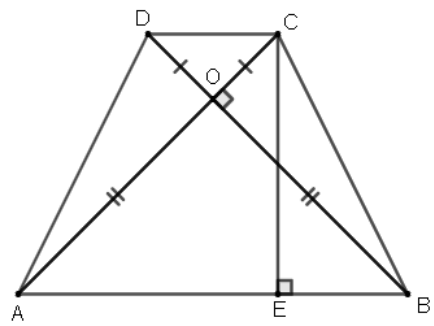
- $OC^2 + OD^2 = CD^2$ c.à.d. $2OC^2 = CD^2$ d'où $OC^2 = \dfrac{c^2}{2}$
- $AO^2 + OB^2 = AB^2$ c.à.d. $2OB^2 = AB^2$ d'où $OB^2 = \dfrac{a^2}{2}$
- $OB^2 + OC^2 = BC^2$ c.à.d. $\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{c^2}{2} = BC^2$ d'où $BC^2 = \dfrac{a^2 + c^2}{2} \quad (1)$

Soit E le projeté orthogonal du point C sur $[AB]$.

Le triangle CEB est alors un triangle rectangle.

Donc : $BC^2 = EB^2 + CE^2$

Or le trapèze $ABCD$ est isocèle, donc $EB = \dfrac{a-c}{2}$



Par suite : $BC^2 = \left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2 + h^2 \quad (2)$

De (1) et (2) on a :

$$\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{a^2+c^2}{2}$$

$$\frac{a^2+c^2-2ac}{4} + h^2 = \frac{a^2+c^2}{2}$$

$$h^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{a^2+c^2-2ac}{4}$$

$$h^2 = \frac{2a^2+2c^2}{4} - \frac{a^2+c^2-2ac}{4}$$

$$h^2 = \frac{a^2+c^2+2ac}{4} = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2$$

Soit : $\boxed{h = \dfrac{a+c}{2}}$

2) on sait que : $\mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{(AB+CD)\times h}{2} = \dfrac{(a+c)\times h}{2}$

Et d'après la première question on a : $\dfrac{a+c}{2} = h$

Donc : $\boxed{\mathcal{A}_{ABCD} = h \times h = h^2}$