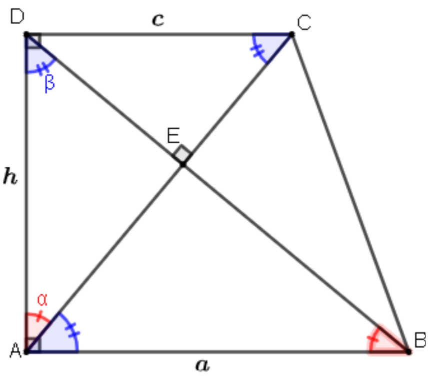
Exercice 1

Soient : $\alpha = D\hat{A}C$ et $\beta = A\hat{D}B$

DAE est un triangle rectangle en E, donc $\alpha + \beta = 90^0$.

On a alors $C\hat{A}B = \beta$ $A\hat{B}D = \alpha$ et $D\hat{C}A = \beta$.



Les triangles ADB et DAC sont semblables car :

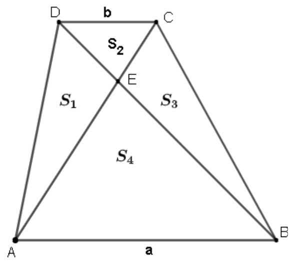
$A\hat{D}C = D\hat{A}B$ et $D\hat{A}C = A\hat{B}D$

Donc : $\dfrac{DB}{AC} = \dfrac{AB}{DA} = \dfrac{AD}{DC}$

D'où : $\dfrac{a}{h} = \dfrac{h}{c}$ équivalent à $h^2 = ac$

Par suite : $\boxed{h = \sqrt{ac}}$

Exercice 2



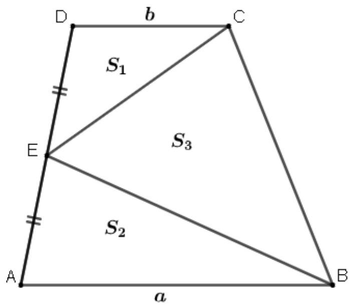
Soient : $(S_1)(S_2)(S_3)$ et (S_4) les aires des triangles

AOD ; DOC ; COB et AOB respectivement.

On a : $S_1 + S_4 = \dfrac{ah}{2}$, $S_3 + S_4 = \dfrac{ah}{2}$ donc $S_1 + S_4 = S_3 + S_4$

Par suite : $\boxed{S_1 = S_3}$

Exercice 3



On a : $A_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 = \dfrac{(a+b)h}{2}$

Avec : $S_1 = \dfrac{CD \times EF}{2}$; $S_2 = \dfrac{AB \times EG}{2}$

Donc : $S_3 = A_{ABCD} - (S_1 + S_2)$

$$S_3 = \frac{(a+b)\times h}{2} - \left(\frac{CD \times EF}{2} + \frac{AB \times EG}{2}\right)$$

$$S_3=\frac{(a+b)\times(EF+EG)}{2}-\left(\frac{b\times EF}{2}+\frac{a\times EG}{2}\right)$$

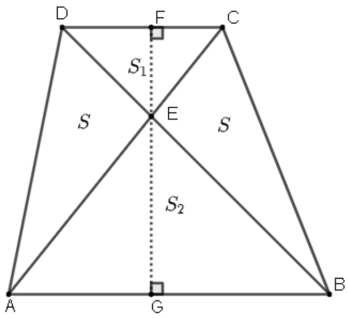
$$S_3=\frac{a\times EF}{2}+\frac{a\times EG}{2}+\frac{b\times EF}{2}+\frac{a\times EG}{2}-\frac{b\times EF}{2}-\frac{a\times EG}{2}$$

$$S_3=\frac{a\times EF}{2}+\frac{a\times EG}{2}$$

$$\boxed{S_3=S_2+S_1}$$

Exercice 4

1.



(AC) *et* (BD) sont deux droites sécantes, (AB) *et* (CD) sont paral

Donc d'après le théorème de Thales : $\frac{EA}{EC}=\frac{EB}{ED}=\frac{AB}{DC}$ (1)

(FG) *et* (BD) sont deux droites sécantes, (AB) *et* (CD) sont parall

Donc : $\frac{EG}{EF}=\frac{ED}{EB}$ (2) c.à.d. $\frac{EF}{EG}=\frac{EB}{ED}$ (2)

De (1) *et* (2) on conclut : $\frac{AB}{DC}=\frac{EF}{EG}$

On a : $\mathrm{A}_{ABE}=S_2=\frac{AB\times EG}{2}$ donc $AB\times EG=2S_2$ et $EG=\frac{2S_2}{AB}$

$\mathrm{A}_{CDE}=S_1=\frac{CD\times EF}{2}$ $CD\times EF=2S_1$ $EF=\frac{2S_1}{CD}$

Par suite : $\frac{AB\times EG}{CD\times EF}=\frac{2S_2}{2S_1}=\frac{S_2}{S_1}$ c.à.d. $\left(\frac{AB}{CD}\right)\left(\frac{EG}{EF}\right)=\frac{S_2}{S_1}$

Or $\frac{AB}{DC}=\frac{EF}{EG}$ donc $\left(\frac{AB}{CD}\right)^2=\left(\frac{EG}{EF}\right)^2=\frac{S_2}{S_1}$

D'où : $\frac{AB}{CD}=\frac{EG}{EF}=\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$

On pose : $AB=x \quad donc \quad CD=x\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$

On a : $\mathrm{A}_{ABCD}=\frac{1}{2}(EF+EG)(AB+CD)$

$$\mathrm{A}_{ABCD}=\frac{1}{2}\left(\frac{2S_1}{CD}+\frac{2S_2}{AB}\right)\left(x+x\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}\right)$$

$$\mathrm{A}_{ABCD}=\frac{1}{2}\left(\frac{2S_1}{x\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}}+\frac{2S_2}{x}\right)\left(x+x\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}\right)$$

$$\mathrm{A}_{ABCD}=\frac{1}{2}\left(\frac{2S_1}{\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}}+2S_1+2S_2+2S_2\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}\right)$$

$$\mathrm{A}_{ABCD}=\frac{1}{2}\left(2S_1\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}+2S_1+2S_2+2S_2\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}\right)$$

$$\mathrm{A}_{ABCD}=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{S_1S_2}+2S_1+2S_2+2\sqrt{S_1S_2}\right)$$

$$\mathrm{A}_{ABCD}=\frac{1}{2}\left(2S_1+2S_2\right)+\frac{1}{2}\left(4\sqrt{S_1S_2}\right)$$

$$\mathrm{A}_{ABCD}=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}$$

On a d'autre part : $\mathrm{A}_{ABCD}=2S+S_1+S_2$

On en déduit : $2S=2\sqrt{S_1S_2}$

C.à.d. : $\boxed{S=\sqrt{S_1S_2}}$

2. On a : $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}$

   Donc : $S_1+S_2=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2-2\sqrt{S_1S_2}$

   On sait que : $\mathrm{A}_{ABCD}=2S+S_1+S_2$

$$=2S+\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2-2\sqrt{S_1S_2}$$

   Et $S=\sqrt{S_1S_2}$

   Donc : $\mathrm{A}_{ABCD}=2\sqrt{S_1S_2}+\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2-2\sqrt{S_1S_2}$

$$\mathrm{A}_{ABCD}=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$$

   Par suite : $\boxed{\sqrt{\mathrm{A}_{ABCD}}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}$